
(★) **Exercice 1** Soit (u_n) une suite vectorielle de l'espace normé E . Soit $\ell \in E$. Rappeler la définition de $u_n \rightarrow \ell$ et montrer que l'opération limite est compatible avec le passage à la norme : $u_n \rightarrow \ell \Rightarrow \|u_n\| \rightarrow \|\ell\|$.

(★) **Exercice 2**

Vérifier que N définit une norme sur $E = \mathbb{R}[X]$, où $N(P) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|$.

(★) **Exercice 3** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, $f_n(x) = xe^{-nx}$. Calculer $\|f_n\|_\infty$.
 2. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sin^n(x) \cos(x)$. Calculer $\|f_n\|_\infty$. Indication : on pourra commencer par calculer $|f_n(x + 2\pi)|$, $|f_n(-x)|$ et $|f_n(\pi - x)|$ pour en déduire que $\|f_n\|_\infty = \max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |f_n(x)|$.
-

(★) **Exercice 4** On munit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ des trois normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$. Étudier la convergence vers la fonction nulle ℓ des suites vectorielles :

1. (f_n) avec $f_n : x \mapsto x^n$
 2. (g_n) avec $g_n : x \mapsto \sqrt{n}x^n$
 3. (h_n) avec $h_n : x \mapsto nx^n$.
-

(★) **Exercice 5**

On admet que l'on définit deux normes sur l'espace vectoriel E des suites complexes bornées en posant :

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \quad N(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (|u_{2n}| + |u_{2n+1}|)$$

Montrer que N et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.

(★) **Exercice 6**

On considère $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. On définit :

$$N_1(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty \quad N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

1. Justifier que pour $f \in E$, $\|f\|_\infty$ et $\|f'\|_\infty$ sont bien définies.
 2. Vérifier, au choix, que N_1 ou N_2 est une norme sur E . On admet que N_1 et N_2 sont des normes sur E .
 3. Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes. N_1 et N_2 sont-elles équivalentes à $\|\cdot\|_\infty$?
-

(★★) **Exercice 7** Montrer que $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in [0, +\infty[^n \mid x_1 + \dots + x_n \leq 1\}$ est une partie bornée et convexe de $\mathbb{R}^n$.

(★★) **Exercice 8** Soit $n \in \mathbb{N}$ et E_n l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n . Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ vérifiant :

$$\forall P \in E_n, \quad \int_0^1 |P(t)| dt \geq \lambda \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$$

(★) **Exercice 9** Montrer que $\varphi(A, B) = \text{Tr}(A^\top B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En déduire une norme euclidienne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(★★) **Exercice 10** Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right)$.

1. Calculer (on détaillera) $\|A\|$ pour $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
2. (a) Pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.
 (b) Montrer que $\|A\| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$.
 (c) Montrer que $\|AB\| \leq \|A\| \times \|B\|$, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|A^n\| \leq \|A\|^n$.
 (d) Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^{k+1} - B^{k+1} = A(A^k - B^k) + (A - B)B^k$.
 (e) On pose $c = \max(\|A\|, \|B\|)$. Montrer par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \|A^k - B^k\| \leq kc^{k-1}\|A - B\|$$

- (f) En déduire que si une suite $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers A alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $(A_p^k)_{p \in \mathbb{N}}$ tend vers A^k .
-

(★★) **Exercice 11** On munit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ des trois normes :

$$N_1(f) = \int_a^b |f(t)| dt \quad N_2(f) = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt} \quad N_\infty(f) = \max_{t \in [a, b]} |f(t)|$$

1. Montrer que

$$N_1(f) \leq (b-a) N_\infty(f) \quad N_2(f) \leq \sqrt{b-a} N_\infty(f) \quad N_1(f) \leq \sqrt{b-a} N_2(f)$$

et montrer que chacune des ces inégalités est optimale.

2. Montrer que ces trois normes ne sont pas équivalentes.
-

(★★★) **Exercice 12** Soit $L \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $M^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} L$ si, et seulement si, $L^2 = L$.

(★★) **Exercice 13** u est une suite réelle.

1. Parmi les suites ci-dessous, quelles sont celles qui sont extraites d'une autre ?

$$(u_{2n}), (u_{3n}), (u_{6n}), (u_{3 \times 2^n}), (u_{3 \times 2^{n+1}}), (u_{2^n}), (u_{2^{n+1}})$$

2. Soit $(u_{\varphi(n)})$ une suite extraite de (u_n) . Montrer que toute suite extraite de $(u_{\varphi(n)})$ est une suite extraite de (u_n) .
-

(★★) **Exercice 14** u est une suite réelle.

1. On suppose que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite. Prouver que la suite u est convergente.
2. Donner un exemple de suite telle que (u_{2n}) converge, (u_{2n+1}) converge, mais (u_n) n'est pas convergente.
3. On suppose que les suites (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{3n}) sont convergentes. Prouver que (u_n) est convergente.

(★★) **Exercice 15** u est une suite réelle.

1. On suppose que (u_n) est croissante et qu'elle admet une suite extraite convergente. Que dire de (u_n) ?
 2. On suppose que (u_n) est croissante et qu'elle admet une suite extraite majorée. Que dire de (u_n) ?
-

(★★) **Exercice 16** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et u une suite de $E^{\mathbb{N}}$. On suppose que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|u_{k+1} - u_k\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Montrer que la suite (u_k) converge.

(★★) **Exercice 17** Soit A une matrice trigonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant une seule valeur propre α telle que $\alpha \in]-1, 1[$. Montrer que la série $\sum A^k$ converge.

(★★) **Exercice 18** Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, muni d'une norme sous-multiplicative $\|\cdot\|$, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

Soit $H \in E$, $\|H\| < 1$.

1. Montrer que $\sum H^k$ converge.
 2. (*5/2 uniquement*) Montrer que $I_n - H$ est inversible, d'inverse $\sum_{k=0}^{+\infty} H^k$.
-

Banque épreuve orale CCINP

Algèbre : 61 questions 1 et 2.
