

## Programme de révisions – vacances d'automne 2026

### Divers

- Un peu de repos pour revenir avec de l'énergie et de la motivation.
- Des révisions bien menées pour le concours blanc.
- Une bonne répartition des tâches entre les différentes matières.

*Soyez conscients que ce sont les seules vacances de l'année où vous pouvez consolider les bases de MPSI et de début d'année. Nous aurons notamment besoin de l'algèbre linéaire, des développements limités, des séries, de l'intégration et des normes toute l'année.*

### Démonstrations et questions à réviser (déjà rencontrées pour les khôlles).

- Maîtriser le programme des khôlles de la rentrée.
- Connaître la méthode d'étude d'une suite arithmético-géométrique et les formules pour les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (formulaire pages 124-125).
- Réviser les développements limités usuels à l'ordre 3. Avoir suffisamment bien compris la formule de Taylor-Young pour obtenir facilement des équivalents en un point.
- L'application  $\varphi : (A, B) \mapsto \text{Tr}(A^\top B)$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^n e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ . Montrer que  $u_n$  est bien défini.
- Montrer que  $f : t \mapsto \left( \frac{\arctan(t)}{t} \right)^2$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .
- Discuter de l'intégrabilité de  $f : t \mapsto \frac{t^r - 1}{t^2 \ln t}$  sur  $]1, +\infty[$  en fonction du paramètre réel  $r$ .
- Montrer que l'intégrale  $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{3/2}} dt$  converge.
- Montrer que  $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x^{3/2}}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ .

- Existence et valeur de  $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
- Savoir calculer  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ .
- Montrer que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$  par deux méthodes : avec une comparaison série-intégrale ; avec le théorème de sommation d'une relation de comparaison, cas divergent.
- Savoir effectuer une interversion de sommations avec le théorème de Fubini. Par exemple,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ .
- Sommations par paquets (pairs, impairs ou autres).
- Application du théorème du produit de Cauchy à deux séries exponentielles, à deux séries  $\sum x^k$ .
- Savoir écrire une fonction en Python renvoyant la moyenne d'une liste  $L$  ; renvoyant la somme et le produit des éléments d'un tableau liste de listes (apparenté à une matrice).
- Savoir écrire une fonction en Python renvoyant la valeur maximale d'une liste  $L$ , ou renvoyant un indice réalisant le maximum dans une liste  $L$ .
- Savoir montrer que  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  (extrait de BEO 92).
- B.E.O. (au minimum !) 25 / 46 / 61 / 90 / 91.
- *Démonstrations pour les 5/2* : Pour tout  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x$ . Pour tout  $x$  non nul,  $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ . Théorème de Cesàro. Déterminant de Vandermonde (par récurrence). Si  $u$  est nilpotent, l'indice de nilpotence est inférieur ou égal à  $\dim E$  (quelle famille est libre ?). Si  $F$  est stable par  $u$ , alors  $\chi_{u_F}$  divise  $\chi_u$  (corollaire :  $1 \leq \dim E_\lambda \leq m(\lambda)$ ).

### Pistes pour compléter ce qui précède et approfondir

- Refaire une partie des exercices des feuilles de TD, en fonction de votre niveau (vous avez les corrigés). Refaire une partie des TP de Python et SQL.
- Revoir ses copies pour ne plus refaire les mêmes erreurs.
- Refaire des parties des DS (en fonction de son niveau).

*Bonnes vacances à tous ! ♥*

✉ Je me tiens à votre disposition par mail si vous avez des questions.