

Devoir surveillé n° 5 – sujet B MP

samedi 14 février 2026



La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Conditionnement d'une matrice et applications

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel non nul, et on rappelle que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes.

On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices diagonales.

On rappelle que l'on désigne par $M^\top$ la transposée d'une matrice M .

Pour alléger les notations, on identifiera les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ aux matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On désignera par $\mathcal{B} = (E_1, E_2, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|$, en posant pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ qui est la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathbb{R}^n$ où par définition, pour tout X et Y de $\mathbb{R}^n$, $\langle X, Y \rangle = X^\top Y$.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note $\rho(M)$ le réel défini par : $\rho(M) = \max_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)} |\lambda|$.

On note par ailleurs $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et par $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie A - Construction d'une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On se propose dans cette partie de montrer que l'application N donnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$N : A \longmapsto \sup_{\|X\|=1} \|AX\|$$

est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et d'en étudier quelques propriétés. *Remarque de madame Leroy : on aura donc à (re)démontrer des propriétés de $\|\cdot\|$.*

I - Étude de l'application N

Dans toute cette partie, on considère A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont on note $L_1, L_2, \dots, L_n$ les n lignes et $C_1, C_2, \dots, C_n$ les n colonnes, que l'on pourra identifier à des éléments de $\mathbb{R}^n$.

1. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|X\| = 1$. En notant $M = \max_{1 \leq i \leq n} \|L_i\|$, montrer que :

$$\|AX\| \leq M\sqrt{n}$$

On pourra au préalable s'intéresser à la i^{e} ligne de la matrice AX et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

2. En déduire que l'application N est bien définie, puis que : $N(A) = \sup_{X_0 \neq 0} \frac{\|AX_0\|}{\|X_0\|}$.

3. Montrer que l'application N ainsi définie est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. En est-il de même pour l'application $S : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ M & \longmapsto \rho(M) \end{cases} ?$

5. Soit $\Delta \in D_n(\mathbb{R})$ dont on note $\delta_1, \dots, \delta_n$ les termes diagonaux.

Vérifier que $N(\Delta) = \max_{1 \leq i \leq n} |\delta_i|$.

6. À l'aide de l'application $X \mapsto \|AX\|$, démontrer que : $N(A) = \max_{\|X\|=1} \|AX\|$.

7. Établir que : $\forall X \in \mathbb{R}^n, \|AX\| \leq N(A)\|X\|$.

8. Soit B une autre matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$N(AB) \leq N(A)N(B)$$

9. Montrer que : $\max_{1 \leq i \leq n} \|C_i\| \leq N(A)$.

10. Déterminer $N(A)$ dans le cas où toutes les colonnes de A sont nulles, sauf la dernière.

En déduire $N(A)$ dans le cas où $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

II - Cas des matrices orthogonales et symétriques

Dans cette partie, A désigne une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et U une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

11. Déterminer $N(U)$.

12. Démontrer que $N(UA)$ et $N(A)$ sont égales.

13. En considérant $X_0 \in \mathbb{R}^n$ où $\|X_0\| = 1$ tel que $\|AX_0\| = N(A)$, démontrer que $N(AU) = N(A)$.

14. On suppose de plus dans cette question uniquement que la matrice A est une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que : $N(A) = \rho(A)$.

15. Déterminer $N(A)$ dans le cas où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Partie B - Conditionnement d'une matrice pour la norme N

On définit sur $GL_n(\mathbb{R})$ l'application notée cond par :

$$\text{cond} : \begin{cases} GL_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ A & \longmapsto N(A)N(A^{-1}) \end{cases}$$

I - Quelques résultats sur le conditionnement

Dans toute cette sous-partie, A désigne une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et U une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

16. Montrer que : $1 \leq \text{cond}(A)$.

17. Quel lien a-t-on entre $\text{cond}(A)$ et $\text{cond}(\alpha A)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$?

18. Démontrer que $\text{cond}(U) = 1$.

19. Que dire de $\text{cond}(UA)$, $\text{cond}(AU)$ et de $\text{cond}(A)$?

II - Un exemple de minoration du conditionnement d'une matrice

On suppose dans cette partie uniquement que $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq n}}$ où : $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 2 & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

20. On considère le vecteur X de $\mathbb{R}^n$ donné par : $X = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} 2^{n-k} E_k$.

Montrer que $AX = E_n$.

21. Dédurre de ce qui précède que $N(A^{-1}) \geq 2^{n-1}$.

22. Justifier $\|AE_2\| > 2$, pour en déduire que $\text{cond}(A) > 2^n$.

Partie C - Conditionnement pour une matrice réelle inversible

23. Soit S une matrice de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On considère $\mathcal{C} = (V_1, \dots, V_n)$ une base diagonalisante orthonormée de $\mathbb{R}^n$ où pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, V_i est un vecteur propre associé à la valeur propre notée λ_i et où l'on suppose que $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ sont les valeurs propres de S comptées avec leur ordre de multiplicité.

Montrer que : $N(S) = \max_{\|X\|=1} |\langle SX, X \rangle|$.

24. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle.

Démontrer que la matrice $A^\top A$ appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ pour établir que $N(A^\top A) = N(A)^2$.

25. Dédurre de ce qui précède que pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle : $N(A) = \sqrt{\rho(A^\top A)}$.

26. On suppose dans cette question que A est une matrice $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible.

En remarquant que $A^\top A = A^{-1} A A^\top A$, démontrer que les matrices $AA^\top$ et $A^\top A$ ont exactement les mêmes valeurs propres.

27. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. On note μ_m et μ_M respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs propres de la matrice $A^\top A$ et où l'on suppose que l'on a $0 < \mu_m \leq \mu_M$.

Montrer que : $\text{cond}(A) = \sqrt{\frac{\mu_M}{\mu_m}}$.

28. Exprimer $\text{cond}(A)$ lorsque A appartient à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ à l'aide des valeurs propres de A en remarquant que $A^\top A = A^2$.

Partie D - Calcul explicite de conditionnement

Dans toute cette partie, on désigne par T la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par : $T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Le but de cette partie est de déterminer la valeur de $\text{cond}(T)$ en commençant par déterminer les éléments propres de la matrice T .

29. Montrer que les valeurs propres de T sont réelles.

30. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \notin (n+1)\mathbb{Z}$. On considère le vecteur U_k de $\mathbb{R}^n$ donné par :

$$U_k = \left(\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \sin\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right), \dots, \sin\left(\frac{(n-1)k\pi}{n+1}\right), \sin\left(\frac{nk\pi}{n+1}\right) \right).$$

Montrer que U_k est un vecteur propre de T et préciser la valeur propre associée.

31. En déduire l'ensemble des valeurs propres de T .

32. Déterminer alors la valeur de $\text{cond}(T)$.

Partie E - Inégalité de Kantorovich

Dans toute cette partie, A désigne une matrice de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et on désigne par $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ l'ensemble de ses valeurs propres où l'on suppose que $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ et comptées avec leur ordre de multiplicité, et on désigne par $\mathcal{C} = (V_1, \dots, V_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A .

On se propose d'établir le résultat suivant, appelée inégalité de Kantorovich :

$$(K) : \quad \forall X \in \mathbb{R}^n, \|X\|^4 \leq \langle AX, X \rangle \langle A^{-1}X, X \rangle \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{\text{cond}(A)}} + \sqrt{\text{cond}(A)} \right)^2 \|X\|^4.$$

I - Une première démonstration

On désigne par P le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ donné par $P = X^2 - (\lambda_1 + \lambda_n)X + \lambda_1\lambda_n$.

33. Exprimer $\text{cond}(A)$ à l'aide des valeurs propres de A .

34. On admet que l'application $(\cdot, \cdot)_A : \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) & \mapsto \langle AX, Y \rangle \end{cases}$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, démontrer que : $\forall X \in \mathbb{R}^n, \|X\|^4 \leq \langle AX, X \rangle \langle A^{-1}X, X \rangle$.

35. Montrer que : $\forall k \in \{1, \dots, n\}, P(\lambda_k) \leq 0$.

36. Déterminer les valeurs propres de la matrice $B = A^{-1}P(A)$ et en déduire que $\langle BX, X \rangle \leq 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$.

37. Pour $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ fixé, on désigne par f la fonction polynôme de degré 2 définie par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ \lambda & \mapsto \langle AX, X \rangle \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_n) \|X\|^2 \lambda + \lambda_1 \lambda_n \langle A^{-1}X, X \rangle \end{cases}$$

Vérifier que $f(1) = \langle BX, X \rangle$, montrer que $f(0)f(1) \leq 0$, puis établir que :

$$(\star) : \quad (\lambda_1 + \lambda_n)^2 \|X\|^4 - 4 \langle AX, X \rangle \langle A^{-1}X, X \rangle \lambda_1 \lambda_n \geq 0.$$

38. Déduire de ce qui précède l'inégalité de Kantorovich.

II - Une deuxième démonstration

On admet que, pour établir la relation (K), il suffit de la vérifier pour un vecteur X de norme 1. Dans toute cette partie, $X = (x_1, \dots, x_n)$ désigne donc un vecteur de $\mathbb{R}^n$ de norme 1 dont les coordonnées sont données dans la base $\mathcal{C}$. On considère alors un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et on définit la variable aléatoire Z par :

$$Z(\Omega) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \text{ et } \forall i \in \{1, \dots, n\}, \mathbb{P}(Z = \lambda_i) = x_i^2$$

39. Justifier que l'on définit bien une loi de probabilité pour Z .

40. Justifier que Z et $\frac{1}{Z}$ admettent une espérance, puis les exprimer en fonction de $\langle AX, X \rangle$ et de $\langle A^{-1}X, X \rangle$.

41. En remarquant que la variable aléatoire $(Z - \lambda_1)(Z - \lambda_n)$ est négative, établir l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{Z} \leq \frac{\lambda_1 + \lambda_n - Z}{\lambda_1 \lambda_n}$$

42. En déduire alors que :

$$\mathbb{E}(Z) \mathbb{E}\left(\frac{1}{Z}\right) \leq -\frac{1}{\lambda_1 \lambda_n} \left(\mathbb{E}(Z) - \frac{\lambda_1 + \lambda_n}{2} \right)^2 + \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1 \lambda_n}.$$

43. Déduire de ce qui précède la seconde partie de l'inégalité de Kantorovich.