

Devoir surveillé n° 5 MP

samedi 14 février 2026



La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi de probabilité donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n = P(X = n), \text{ la fonction génératrice de } X \text{ est } G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n.$$

1. Démontrer que l'intervalle $] -1, 1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de la fonction G_X .

2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On pose $S = X_1 + X_2$, démontrer que pour tout $t \in] -1, 1[$, $G_S(t) = G_{X_1}(t) \cdot G_{X_2}(t)$ par deux méthodes : l'une en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières et l'autre en utilisant uniquement la définition : $G_X(t) = E(t^X)$.

On généralise ce résultat, que l'on pourra utiliser dans la question suivante, à n variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ (on ne demande pas de preuve de cette récurrence).

3. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2. On effectue n tirages d'une boule avec remise et on note S_n la somme des numéros tirés. Déterminer pour tout $t \in] -1, 1[$, $G_{S_n}(t)$ et en déduire la loi de S_n .

Exercice 2

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

1. Soient P et Q deux éléments de E . Prouver que la série $\sum_{n \geq 0} 2^{-n} P(n) Q(n)$ est absolument convergente.

2. On pose pour tous P et Q dans E : $(P|Q) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} P(n) Q(n)$.

(a) Montrer que : $(S|S) = 0 \iff S$ est le polynôme nul.

(b) Démontrer alors que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

3. Quelques calculs de sommes

(a) Rappeler l'ensemble de définition de la fonction $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ et sa somme.

(b) Justifier que la série $\sum_{n \geq 0} e^{-nx}$ converge pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

(c) Exprimer $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$ à l'aide de la fonction f et en déduire que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(d) Soit $x > 0$. Exprimer à l'aide des fonctions usuelles, $g(x)$, $g'(x)$ et $g''(x)$.

(e) Soit α un entier naturel, on pose $S_\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} n^\alpha 2^{-n}$.

Calculer S_0 , S_1 et S_2 .

On pourra utiliser les questions précédentes avec une valeur de x bien choisie.

On admettra que $S_3 = 26$ et $S_4 = 150$.

4. En s'aidant du produit scalaire de la question 2., prouver que l'ensemble

$$\left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} (n^2 - cn - d)^2, (c, d) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

possède un minimum et déterminer ce minimum.

Problème

On définit la suite des polynômes de Hermite dans $\mathbb{R}[X]$ par $H_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad H_{n+1} = 2XH_n - H'_n$$

L'objectif de ce problème est d'établir quelques propriétés de cette famille de polynômes.

Partie I - Préliminaires

Les deux sous-parties suivantes peuvent être traitées de manière indépendante.

I.1 - Un produit scalaire sur l'espace des polynômes

Dans cette sous-partie, on introduit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, puis en déduire que cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire pour tout polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$ que la fonction $t \mapsto R(t)e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. On en déduit que l'on peut définir l'application $\varphi : \mathbb{R}[X]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad \varphi(P, Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$$

3. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

I.2 - Calcul de l'intégrale de Gauss

Dans cette sous-partie, on détermine la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

dont on a prouvé la convergence dans la sous-partie précédente.

On considère les fonctions $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$u(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad v(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} dt$$

4. Justifier que u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de sa dérivée.
5. Justifier que v est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de sa dérivée.
6. Montrer que la fonction $x \mapsto u(x)^2 + v(x)$ est constante sur $\mathbb{R}$, puis que sa valeur est $\frac{\pi}{4}$.
7. En déduire que la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

est $\sqrt{\pi}$.

Partie II - Quelques propriétés des polynômes de Hermite

Dans cette partie, on établit quelques propriétés sur la famille des polynômes de Hermite. On considère la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$.

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que H_n est de degré n et que son coefficient dominant est 2^n .
9. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ qu'on a

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) f(x)$$

On rappelle que le produit scalaire φ sur $\mathbb{R}[X]$ est défini dans la sous-partie I.1.

10. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p < q$. Montrer pour tout entier $k \in \llbracket 0, q \rrbracket$ que :

$$\varphi(H_p, H_q) = (-1)^{q-k} \int_{-\infty}^{+\infty} H_p^{(k)}(t) f^{(q-k)}(t) dt$$

11. Soit $d \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(H_0, \dots, H_d)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_d[X]$.
12. Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, calculer la norme du polynôme H_p .

Partie III - Série génératrice exponentielle des polynômes de Hermite

Dans cette partie, on considère un nombre $x \in \mathbb{R}$.

III.1 - Expression de la série génératrice

L'objectif de cette première sous-partie est de démontrer que la série entière

$$\sum_{n \geq 0} \frac{H_n(x)}{n!} z^n$$

de la variable complexe z admet un rayon de convergence infini et on calcule sa somme.

13. Donner les développements en série entière des fonctions $z \mapsto \exp(2xz)$ et $z \mapsto \exp(-z^2)$ sur $\mathbb{C}$ en précisant leur rayon de convergence respectif.
14. Montrer qu'il existe une suite de nombres complexes $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qu'on ne cherchera pas à déterminer explicitement, telle que la série entière $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ ait un rayon de convergence infini et que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(-(x-z)^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

En considérant la fonction $f : t \mapsto e^{-t^2}$ introduite dans la *partie II*, on déduit du résultat de la question ci-dessus que l'on a l'égalité :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(x-t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$$

15. En utilisant la relation ci-dessus et la question Q9, en déduire que la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{H_n(x)}{n!} z^n$ admet un rayon de convergence infini et que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(2xz - z^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} z^n$$

III.2 - Expression intégrale des polynômes de Hermite

Dans cette seconde sous-partie, on exploite les résultats de la sous-partie précédente afin d'établir une expression intégrale pour les polynômes de Hermite.

On considère un entier $p \in \mathbb{N}$ et la fonction $G_x : z \mapsto \exp(2xz - z^2)$. On définit également, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$g_n : \theta \mapsto \frac{H_n(x)}{n!} e^{i(n-p)\theta}$$

16. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge normalement sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

17. Montrer que :

$$H_p(x) = \frac{p!}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_x(e^{i\theta}) e^{-ip\theta} d\theta$$
