

Devoir surveillé n° 2 MP

samedi 10 octobre 2026



La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à souligner ou encadrer les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1 (questions proches du cours)

Les questions sont indépendantes.

1. Donner, en démontrant votre réponse, un équivalent en $-\infty$, en 0, en 1, en $+\infty$ de la quantité

$$f(x) = 2 \ln |x| - 5x^7 - 3e^x$$

2. Donner le développement asymptotique à 2 termes quand n tend vers l'infini de

$$u_n = \ln \left(\frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right)$$

3. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice dans la base canonique $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres de f . f est-elle diagonalisable ?

Exercice 2

1. Montrer que la famille $(c_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ n'est pas sommable, où

$$c_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ j & \text{si } i = j \\ -2i3^{i-j} & \text{si } i < j \end{cases}$$

2. Calculer $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} c_{i,j}$.

3. Calculer $\sum_{i=0}^{\infty} c_{i,j}$. Que pensez-vous de $\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{\infty} c_{i,j}$?
-

Exercice 3 – Normes

Exercice A

Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on définit :

$$N(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \quad N_1(f) = |f(0)| + \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)| \quad N_2(f) = |f(0)| + |f'(0)| + \sup_{x \in [0,1]} |f''(x)|$$

1. Montrer que N_2 est une norme sur E . On admet que N_1 est une norme. Quant à N , c'est une norme du cours (la norme uniforme).
2. Montrer que pour tout $f \in E$, $N(f) \leq N_1(f) \leq N_2(f)$.
3. Montrer que N et N_1 ne sont pas équivalentes.

Exercice B

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, et N_1 et N_2 deux normes sur E . On considère :

$$B_1 = \{x \in E, N_1(x) < 1\} \quad \text{et} \quad B_2 = \{x \in E, N_2(x) < 1\}$$

Montrer l'implication : $B_1 = B_2 \Rightarrow N_1 = N_2$.

Problème

Dans tout le texte, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et p un entier naturel non nul.

On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices carrées de taille p à coefficients dans $\mathbb{K}$ et I_p la matrice unité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

On pourra confondre $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}$.

Une matrice N de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est dite « nilpotente » s'il existe un entier naturel r tel que $N^r = 0$.

Si $M_1, \dots, M_k$ sont des matrices carrées, la matrice $\text{diag}(M_1, \dots, M_k)$ désigne la matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont $M_1, \dots, M_k$.

Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, on note Id_E l'application identité sur E .

Enfin, on note $\mathbb{K}[X]$ la $\mathbb{K}$ -algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est « toute-puissante » sur $\mathbb{K}$ et on notera en abrégé « TPK » si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice B de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $A = B^n$.

On note $\mathcal{T}_p(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ toutes-puissantes sur $\mathbb{K}$:

$$\mathcal{T}_p(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \mid \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), A = B^n\}.$$

L'objectif principal du sujet est d'établir le résultat suivant : toute matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est TPK.

Dans la partie I, on traite quelques exemples et contre-exemples.

Dans la partie II, on montre que, dans le cas où le polynôme caractéristique de la matrice A est scindé, on peut ramener l'étude au cas des matrices de la forme $\lambda I_p + N$ avec N nilpotente.

Dans la partie III, on traite le cas des matrices unipotentes, c'est-à-dire de la forme $I_p + N$ avec N nilpotente et on en déduit le théorème principal.

Les parties I et II sont dans une large mesure indépendantes. La partie III utilise les résultats des parties précédentes.

I Quelques exemples

1. Le cas de la taille 1.

- (a) Montrer que $\mathcal{T}_1(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$.
- (b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $b = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Donner les racines n -ièmes du nombre complexe b , c'est-à-dire les solutions de l'équation $z^n = b$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
- (c) En déduire $\mathcal{T}_1(\mathbb{C})$.

2. Une condition nécessaire ...

- (a) Montrer que si $A \in \mathcal{T}_p(\mathbb{K})$, alors $\det(A) \in \mathcal{T}_1(\mathbb{K})$.
- (b) En déduire un exemple de matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui n'est pas TPR.

3. ...mais pas suffisante.

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il n'existe aucune matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$. En déduire que la condition nécessaire de la question précédente n'est pas suffisante.

4. Un cas où A est diagonalisable.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

- (a) Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
- (b) Montrer que la matrice A est TPR.
- (c) Pour $n = 2$, expliciter une matrice B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $B^n = A$.

5. Un exemple de nature géométrique.

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- (a) Justifier que A est la matrice d'une rotation vectorielle dont on précisera une mesure de l'angle.
- (b) En déduire que A est TPR.

6. Le cas des matrices nilpotentes.

Soit N une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

- (a) Déterminer le polynôme caractéristique de N . En déduire que $N^p = 0$.
- (b) Montrer que si N est TPK, alors N est nulle.

II Cas où le polynôme caractéristique est scindé

Dans toute cette partie, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique noté χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$, c'est-à-dire de la forme

$$\chi_A = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{r_i}$$

avec $k, r_1, \dots, r_k$ des entiers naturels non nuls et $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de A , éléments de $\mathbb{K}$.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^p$ dont A est la matrice dans la base $\mathcal{B}$.

Enfin, pour $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on note $C_i = \ker(u - \lambda_i \text{Id}_{\mathbb{K}^p})^{r_i}$ le sous-espace caractéristique de u associé à la valeur propre λ_i .

7. Montrer que $\mathbb{K}^p = C_1 \oplus \cdots \oplus C_k$.
8. Montrer que tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, le sous-espace caractéristique C_i est stable par u .
On note alors u_{C_i} l'endomorphisme de C_i induit par u .
9. Soit $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$. Justifier que $u_{C_i} - \lambda_i \text{Id}_{C_i}$ est un endomorphisme de C_i nilpotent.
10. En déduire que la matrice A peut s'écrire sous la forme

$$A = P \text{diag}(\lambda_1 I_{p_1} + N_1, \dots, \lambda_k I_{p_k} + N_k) P^{-1}$$

avec P une matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $p_i = \dim C_i$ et N_i une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_{p_i}(\mathbb{K})$. On rappelle que $\text{diag}(\lambda_1 I_{p_1} + N_1, \dots, \lambda_k I_{p_k} + N_k)$ désigne la matrice diagonale par blocs de premier bloc $\lambda_1 I_{p_1} + N_1$, de deuxième bloc $\lambda_2 I_{p_2} + N_2$ et de dernier bloc $\lambda_k I_{p_k} + N_k$.

11. Montrer que, si pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, la matrice $\lambda_i I_{p_i} + N_i$ est TP $\mathbb{K}$, alors A est elle-même TP $\mathbb{K}$.

III Le cas des matrices unipotentes

Soit N une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Nous allons montrer que la matrice unipotente $I_p + N$ est TP $\mathbb{K}$. On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale.

12. Une application des développements limités.

- (a) Soit V un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $V(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^p)$. Montrer, à l'aide d'une division euclidienne, qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que $V = X^p Q$.
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'existence d'un polynôme U de $\mathbb{R}[X]$ tel que

$$1 + x = U(x)^n + o(x^p)$$

On pourra utiliser un développement limité de $(1 + x)^\alpha$ au voisinage de 0.

- (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que

$$1 + X = U^n + X^p Q$$

13. Applications.

- (a) Montrer que la matrice unipotente $I_p + N$ est TP $\mathbb{K}$.
- (b) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ non nul. En déduire que si λ est TP $\mathbb{K}$, alors la matrice $\lambda I_p + N$ est TP $\mathbb{K}$.

14. Le résultat annoncé.

- (a) Conclure que toute matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est TP $\mathbb{C}$.
- (b) Toute matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est-elle TP $\mathbb{C}$?

15. Donner un exemple de matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ non diagonalisable et non inversible qui est TP $\mathbb{R}$.