

Devoir des 5/2 – octobre 2026 MP

pour jeudi 8 octobre 2026



Le 23 février 1913, Srinivasa Ramanujan écrivit une lettre au mathématicien Godfrey Hardy dans laquelle il présentait une théorie selon laquelle la somme infinie $1 + 2 + \dots + n + \dots$ vaut $-\frac{1}{12}$. S'en est suivi tout un ensemble de recherches sur ce sujet...

L'objectif de ce problème est de présenter quelques situations où l'on attribue une valeur finie à une *somme infinie*. On s'intéresse en particulier au cas de la série de terme général n . Dans la première partie, sont présentées deux situations qui, dans les deux cas, font apparaître la valeur $-\frac{1}{12}$, ce qui montre que cette valeur ne semble pas être fortuite. La deuxième partie traite plus particulièrement de la façon dont Ramanujan a étudié les sommes infinies en s'appuyant sur la formule d'Euler-Maclaurin. La valeur qu'il octroie à ces sommes étant, en quelque sorte, un terme de compensation entre une somme et une intégrale.

Notations et définition

On note, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ la partie entière de x . On rappelle qu'il s'agit de l'unique entier qui satisfait $x - 1 < [x] \leq x$.

On dira qu'une fonction φ définie sur $\mathbb{R}^+$ est à *support compact* dans $\mathbb{R}^+$ lorsqu'il existe un réel $K \geq 0$ tel que pour tout $t \geq K$, $\varphi(t) = 0$.

Partie A — Deux approches pour une valeur à $1+2+\dots+n+\dots$

I — Une première approche

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$, où $x \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f puis calculer $f(x)$ pour tout $x \in D_f$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D_f et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$.
3. À l'aide de développements limités en 0, déterminer trois constantes réelles a , b et c telles qu'au voisinage de 0 :

$$\frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + c + o(1)$$

4. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-nx} - \frac{1}{x^2} \right)$.

II — Une deuxième approche

On considère dans cette partie une fonction φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{R}^+$ et telle que $\varphi(0) = 1$. Soit $K > 0$ telle que φ soit nulle sur $[K, +\infty[$. On pose ψ la fonction telle que pour tout $t \geq 0$, $\psi(t) = t\varphi(t)$. On peut alors observer que ψ ainsi que toutes ses dérivées sont nulles sur $[K, +\infty[$.

II.1 – Une généralisation du théorème des sommes de Riemann pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Dans cette sous-partie, f désigne une fonction définie de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a, b]$ et x est un réel strictement positif.

5. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $a + nx \in]a, b]$.

6. Montrer que pour tout $L \geq 0$, $\left| L - \left\lfloor \frac{L}{x} \right\rfloor x \right| \leq x$.

7. Montrer que

$$x \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{b-a}{x} \right\rfloor} f(a + nx) - \int_a^b f(t) dt = \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{b-a}{x} \right\rfloor} \left(\int_{a+(n-1)x}^{a+nx} f(a + nx) - f(t) dt \right) - \int_{a+\left\lfloor \frac{b-a}{x} \right\rfloor x}^b f(t) dt$$

8. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} x \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{b-a}{x} \right\rfloor} f(a + nx) = \int_a^b f(t) dt$.

II.2 – Un développement asymptotique lorsque x tend vers 0 de $\sum_{n=1}^{+\infty} n\varphi(nx)$

Soit x un réel strictement positif.

On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $R_{k,\ell}(x) = \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \left(\int_{nx}^t \frac{(t-s)^k}{k!} \psi^{(\ell+k)}(s) ds \right) dt$. On

admet la formule de Taylor avec reste intégral : pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I , pour

tout $a \in I$, pour tout $b \in I$, $f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$.

9. Déterminer $\int_0^K \psi'(t) dt$ ainsi que $\int_0^K \psi''(t) dt$.

10. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} x \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor} nx\varphi(nx)$ ainsi que les valeurs de $\lim_{x \rightarrow 0} x \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor} \psi'(nx)$ et de $\lim_{x \rightarrow 0} x \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor} \psi''(nx)$.

11. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, pour tout $t \geq 0$,

$$\psi^{(\ell)}(t) = \int_K^t \frac{(t-s)^k}{k!} \psi^{(\ell+k+1)}(s) ds$$

12. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^k} \int_{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor x}^K \psi^{(\ell)}(t) dt = 0$.

13. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_{k,\ell}(x)}{x^k} = 0$.

14. Montrer que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \psi^{(\ell)}(t) - \psi^{(\ell)}(nx) dt = \sum_{k=1}^p \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor} \left(\int_{(n-1)x}^{nx} \frac{(t-nx)^k}{k!} \psi^{(\ell+k)}(nx) dt \right) + R_{p,\ell+1}(x)$$

15. En déduire que

$$\frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \psi(t) - \psi(nx) dt = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor} \psi'(nx) + \frac{x}{6} \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor} \psi''(nx) + \frac{R_{2,1}(x)}{x^2}$$

16. Montrer que

$$x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi'(nx) = \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \psi'(nx) - \psi'(t) dt - \int_{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor x}^K \psi'(t) dt$$

17. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi'(nx) = \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi''(nx) - \frac{R_{1,2}(x)}{x} - \frac{1}{x} \int_{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor x}^K \psi'(t) dt$$

18. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \psi(t) - \psi(nx) dt$.

19. Montrer que $\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} n\varphi(nx) = \frac{1}{x^2} \int_0^K \psi(t) dt - \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \left(\int_{(n-1)x}^{nx} \psi(t) - \psi(nx) dt \right) - \frac{1}{x^2} \int_{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor x}^K \psi(t) dt$.

20. En déduire qu'il existe un réel $A \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{n=1}^{+\infty} n\varphi(nx) = \frac{A}{x^2} - \frac{1}{12} + o(1)$.

Partie B – Les sommes infinies au sens de Ramanujan

On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.

I – La formule d'Euler-Mac Laurin

On considère la famille de polynômes $(B_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de sorte que $B_0 = 1$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $B'_p = pB_{p-1}$ et $\int_0^1 B_p(x) dx = 0$.

On admet dans cette partie l'existence et l'unicité des polynômes B_p . On pose pour tout $p \in \mathbb{N}$, $b_p = B_p(0)$ et $\tilde{B}_p$ la fonction 1-périodique de sorte que $\tilde{B}_p$ soit égale à B_p sur $[0, 1[$. Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tilde{B}_p(x) = B_p(x - \lfloor x \rfloor)$.

On pose, pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $r_{p,a} = \int_1^a \frac{\tilde{B}_p(t)}{p!} f^{(p)}(t) dt$.

21. Déterminer B_1 et B_2 .

22. Montrer que pour tout entier naturel p , $B_p(1 - X) = (-1)^p B_p(X)$.

23. Montrer que pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 2, $b_p = B_p(1)$ et pour tout $p \geq 3$ impair, $b_p = 0$.

24. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_k^{k+1} \frac{f^{(p)}(t)}{p!} \tilde{B}_p(t) dt = \frac{B_{p+1}(1)f^{(p)}(k+1) - B_{p+1}(0)f^{(p)}(k)}{(p+1)!} - \int_k^{k+1} \frac{\tilde{B}_{p+1}(t)}{(p+1)!} f^{(p+1)}(t) dt$$

25. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(1) + \dots + f(n) = \int_1^n f(t) dt + \frac{f(1)+f(n)}{2} + r_{1,n}$.

26. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(1) + \dots + f(n) = \int_1^n f(t) dt + \frac{f(1) + f(n)}{2} + \sum_{\ell=1}^p \frac{b_{2\ell}}{(2\ell)!} (f^{(2\ell-1)}(n) - f^{(2\ell-1)}(1)) + r_{2p+1,n}$$

II – La constante de Ramanujan

On suppose dans cette partie qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq q$, $f^{(2p+1)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et que $f^{(2p+1)}(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$. On pose, sous réserve d'existence,

$$C_0 = \frac{f(1)}{2} - \int_0^1 f(t) dt + \int_1^{+\infty} \tilde{B}_1(t) f'(t) dt$$

et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$C_p = \frac{f(1)}{2} - \int_0^1 f(t) dt - \sum_{\ell=1}^p \frac{b_{2\ell}}{(2\ell)!} f^{(2\ell-1)}(1) + \int_1^{+\infty} \frac{\tilde{B}_{2p+1}(t)}{(2p+1)!} f^{(2p+1)}(t) dt$$

27. Montrer pour tout $p \geq q$ que C_p est bien définie et ne dépend pas de l'entier p . On note à présent $\sum_{k \geq 1} f(k)$ la valeur de C_p , où $p \geq q$.
 28. Déterminer $\sum_{k \geq 1} 1$ ainsi que $\sum_{k \geq 1} k$ et $\sum_{k \geq 1} k^2$.
 29. On suppose dans cette question que $q = 0$ et que la suite $(f(n))$ converge vers 0. Montrer que $\sum_{k \geq 1}^{\mathcal{R}} f(k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n f(k) - \int_0^n f(t) dt \right)$. Qu'obtient-on si $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge ?
-