
La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats.
Bon travail !

Durée conseillée : 4 heures

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Cet entier est quelconque sauf dans la partie I, où il est égal à 2.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, $(E_{i,j})$ sa base canonique ($1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$) et I_n sa matrice unité (tous les coefficients de $E_{i,j}$ sont nuls, sauf celui situé à la i^{e} ligne et à la j^{e} colonne, qui vaut 1).

On note $\mathbb{R}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients réels.

Dans tout le problème, A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A .

Pour tout $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on note $P(A) = \sum_{k=0}^d a_k A^k$. L'ensemble des matrices $P(A)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ est noté $\mathbb{R}[A]$.

On dit que P annule A lorsque $P(A) = 0$, ce qui équivaut à $P(u) = 0$. On appelle polynôme minimal de la matrice A le polynôme minimal de l'endomorphisme u ; c'est donc le polynôme unitaire de plus petit degré qui annule A .

On note Φ_A l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\Phi_A(M) = AM - MA$$

L'objet du problème est d'étudier quelques propriétés des éléments propres de Φ_A . Les parties I et II étudient la diagonalisabilité de Φ_A , les parties III et IV en étudient les vecteurs propres.

Les quatre parties sont indépendantes.

Partie I. Étude du cas $n = 2$

Dans toute cette partie, on prendra $n = 2$.

1. Vérifier que l'application Φ_A est linéaire et que I_2 et A appartiennent à $\ker \Phi_A$.

Dans la suite de cette partie, on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Donner la matrice de Φ_A dans la base $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Dans la suite de cette partie, on suppose que $\Phi_A \neq 0$ (c'est-à-dire que $A \neq \lambda I_2$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$).

3. Donner le polynôme caractéristique de Φ_A sous forme factorisée.
4. En déduire que Φ_A est diagonalisable si, et seulement si, $(d - a)^2 + 4bc > 0$.
5. Démontrer que Φ_A est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable.

Partie II. Étude du cas général

On note $c = (c_1, \dots, c_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

6. On suppose dans cette question que A est diagonalisable.

On note $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de u (défini au début du problème) et, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, λ_i la valeur propre associée au vecteur e_i . On note alors P la matrice

$$\text{de passage de la base } c \text{ à la base } e \text{ et } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Enfin, pour tout couple (i, j) d'entiers tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, on pose :

$$B_{i,j} = PE_{i,j}P^{-1}$$

- (a) Exprimer, pour tout couple (i, j) , la matrice $DE_{i,j} - E_{i,j}D$ en fonction de la matrice $E_{i,j}$ et des réels λ_i et λ_j .
 - (b) Démontrer que, pour tout couple (i, j) , $B_{i,j}$ est un vecteur propre de Φ_A .
 - (c) En déduire que Φ_A est diagonalisable.
7. On suppose dans cette question que Φ_A est diagonalisable en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $(P_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ une base de vecteurs propres de Φ_A et, pour tout couple (i, j) , $\lambda_{i,j}$ la valeur propre associée à $P_{i,j}$.
- (a) Dans cette question, on considère A comme une matrice à coefficients complexes ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) et Φ_A comme un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (défini par $\Phi_A(M) = AM - MA$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).
 - i. Justifier que toutes les valeurs propres de Φ_A sont réelles.
 - ii. Soit $z \in \mathbb{C}$. Justifier que si z est une valeur propre de A , alors z est aussi une valeur propre de $A^\top$.
 - iii. Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que z et $\bar{z}$ sont deux valeurs propres de la matrice A . On considère alors $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ ($X \neq 0$) et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ ($Y \neq 0$) tels que $AX = zX$ et $A^\top Y = \bar{z}Y$.
En calculant $\Phi_A(XY^\top)$, démontrer que $z - \bar{z}$ est une valeur propre de Φ_A .
 - (b) En déduire que la matrice A a au moins une valeur propre réelle.
On note λ une valeur propre réelle de A et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ($X \neq 0$) une matrice colonne telle que $AX = \lambda X$.
 - (c) Démontrer que, pour tout couple (i, j) , il existe un réel $\mu_{i,j}$, que l'on exprimera en fonction de λ et $\lambda_{i,j}$, tel que $AP_{i,j}X = \mu_{i,j}P_{i,j}X$.
 - (d) En déduire que A est diagonalisable.

Partie III. Étude des vecteurs propres de Φ_A associés à la valeur propre 0

Soit m le degré du polynôme minimal de A .

- 8. Démontrer que la famille $(I_n, A, \dots, A^{m-1})$ est une base de $\mathbb{R}[A]$.
- 9. Vérifier que $\mathbb{R}[A]$ est inclus dans $\ker \Phi_A$ et en déduire une minoration de $\dim \ker \Phi_A$.
- 10. *Un cas d'égalité*

On suppose que l'endomorphisme u (défini au début du problème) est nilpotent d'indice n (c'est-à-dire que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$). On considère un vecteur y de $\mathbb{R}^n$ tel que $u^{n-1}(y) \neq 0$ et, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on pose $e_i = u^{n-i}(y)$.

- (a) Démontrer que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
- (b) Soient $B \in \ker \Phi_A$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B .

$$\text{Démontrer que si } v(y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \text{ } (\alpha_i \in \mathbb{R}) \text{ alors } v = \sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i}.$$

- (c) En déduire $\ker \Phi_A$.

11. *Cas où u est diagonalisable*

On suppose que u est diagonalisable. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ ($1 \leq p \leq n$) les p valeurs propres distinctes de u et, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, $E_u(\lambda_k)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_k . On note m_k la dimension de cet espace propre.

- (a) Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B . Démontrer que $B \in \ker \Phi_A$ si et seulement si, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, $E_u(\lambda_k)$ est stable par v (c'est-à-dire $v(E_u(\lambda_k)) \subset E_u(\lambda_k)$).
- (b) En déduire que $B \in \ker \Phi_A$ si et seulement si la matrice de v , dans une base adaptée à la décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe des sous-espaces propres de u , a une forme que l'on précisera.
- (c) Préciser la dimension de $\ker \Phi_A$.

Partie IV. Étude des vecteurs propres de Φ_A associés à une valeur propre non nulle

Dans cette partie, α est une valeur propre non nulle de Φ_A et B un vecteur propre associé ($B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \neq 0$). On note π_B le polynôme minimal de B et d le degré de π_B .

- 12. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Phi_A(B^k) = \alpha k B^k$.
 - 13. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer $\Phi_A(P(B))$ en fonction de α , B et $P'(B)$.
 - 14. Démontrer que le polynôme $X\pi'_B - d\pi_B$ est le polynôme nul (π'_B étant le polynôme dérivé du polynôme minimal de la matrice B).
 - 15. En déduire que $B^d = 0$.
-