

Devoir maison n° 4
MP
pour jeudi 1er octobre 2026



La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats.
Bon travail !

✎ : proche du cours, méthode à connaître, exercice de structure classique... Les exercices ✎ sont OBLIGATOIRES.

⚡ : problème de concours, exercice pour chercher plus... Les exercices ⚡ sont facultatifs, mais bien évidemment CONSEILLÉS.

Exercice 1 – ✎

Énoncer la formule de Stirling pour l'équivalent de $n!$. Donner alors un équivalent de $\binom{2n}{n}$.

Exercice 2 – ✎

1. Montrer que lorsque x est au voisinage de 0 on a :

$$\ln(2 - e^x) = -x - x^2 + o(x^2)$$

2. (a) Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a :

$$2 - e^{1/k} \in]0, 1[$$

(b) Quelle est la nature de la série de terme général $\ln(2 - e^{1/k})$?

(c) Pour n entier supérieur ou égal à 2, on pose :

$$V_n = \sum_{k=2}^n \ln(2 - e^{1/k}) \quad \text{et} \quad u_n = \exp V_n$$

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

3. (a) Montrer que :

$$\ln(nu_n) = \sum_{k=2}^n \left[\ln(2 - e^{1/k}) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \right]$$

(b) Déterminer un équivalent, quand k tend vers $+\infty$, de $\ln(2 - e^{1/k}) - \ln(1 - \frac{1}{k})$.

(c) En déduire qu'il existe $K > 0$ tel que u_n est équivalent, quand n tend vers $+\infty$, à $\frac{K}{n}$.
Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

4. Donner la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.

Exercice 3 –

On se propose dans cet exercice de montrer que la série de terme général $u_n = (-1)^n \frac{\sin n}{n}$ est convergente et de calculer sa somme.

- On désigne par f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a, b]$ et par λ un réel strictement positif. Montrer que : $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = 0$.
- (a) Rappeler la formule donnant $\cos(a+b)$ pour a et b réels.
Exprimer, pour tout réel t et tout entier k , $\cos\left(\frac{t}{2}\right) \cos(kt)$ en fonction de $\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right)$ et $\cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)$.
(b) En déduire que :

$$\forall t \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \cos\left(\frac{t}{2}\right) \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) = \frac{1}{2} \left((-1)^n \cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right)$$

(c) Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n u_k = (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)} dt - \frac{1}{2}$.

- Utiliser la première question pour conclure que la série de terme général u_n converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n} = -\frac{1}{2}$$

Exercice 4 –

Partie I : Étude de $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p}$, $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Rappeler l'énoncé d'un théorème (y compris l'évaluation du reste) permettant de montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^p}{p}$ est convergente, où $p \in \mathbb{N}^*$.
(b) i. Montrer que $\lim_{q \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^q}{1+x} dx = 0$.
ii. À l'aide d'une suite géométrique, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.
- (a) Par intégration par parties, montrer qu'il existe un entier $\beta \in \mathbb{N}^*$ et un réel k différent de 0 tel que :

$$R_n = k \frac{(-1)^{n+1}}{n^\beta} + O\left(\frac{1}{n^{\beta+1}}\right)$$

- (b) En déduire la nature de la série de terme général R_n .

- Déterminer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n$.

Partie II : Étude de $r_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$, $n \in \mathbb{N}$.

4. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{\sqrt{p}}$.
- (a) Montrer que la suite $\left(U_n - \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}} \right)_{n \geq 1}$ converge. On notera $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}}) - 2$.
- (b) Soit θ un réel strictement supérieur à 1. Justifier l'existence de $\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^\theta}$ et, en utilisant une comparaison série-intégrale, en trouver un équivalent quand n tend vers l'infini.
5. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = U_n - 2\sqrt{n} - L$.
- (a) Étudier la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ et en déduire que v_n équivaut à $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers l'infini.
- (b) De la même manière, en posant $w_n = v_n - \frac{1}{2\sqrt{n}}$ et en étudiant la série $w_{n+1} - w_n$, déterminer un équivalent de $v_n - \frac{1}{2\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers l'infini. En déduire que U_n est de la forme :
- $$U_n = A\sqrt{n} + B + \frac{C}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{C}{n\sqrt{n}}\right)$$
6. (a) Montrer que la série $\sum_{p \geq 1} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$ converge. On notera $S = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$.
- (b) Exprimer r_{2n} en fonction de S et des sommes partielles U_n et U_{2n} .
- (c) En déduire qu'il existe deux réels a et b que l'on déterminera, tels que :

$$r_{2n} = a + \frac{b}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{C}{n\sqrt{n}}\right)$$

Exprimer S en fonction de L et déterminer la nature de la série de terme général r_n .
