

Devoir maison n° 3 MP

pour jeudi 24 septembre 2026



La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats.
Bon travail !

✎ : proche du cours, méthode à connaître, exercice de structure classique... Les exercices ✎ sont OBLIGATOIRES.

⚡ : problème de concours, exercice pour chercher plus... Les exercices ⚡ sont facultatifs, mais bien évidemment CONSEILLÉS.

Exercice 1 – ✎

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = c > 1$ et pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$

1. Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.

2. Montrer que $\frac{1}{u_n^2} \leq \frac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que pour tout n entier naturel, $2 \leq u_{n+1}^2 - u_n^2 \leq 2 + u_{n+1} - u_n$.

3. Montrer que $u_n \sim \sqrt{2n}$.

Exercice 2 – ✎

1. À l'aide de la formule de Taylor-Young, donner le développement limité à l'ordre 4 en $\frac{\pi}{4}$ de $x \mapsto \sin x$.

2. En effectuant une translation, donner le développement limité à l'ordre 3 en 1 de $x \mapsto x \ln x$.

3. Par produit, déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $x \mapsto \cos x \sin x$.

4. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \sqrt{1 + \ln(1+x)}$.

5. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1 + \ln(1+x)}$.

6. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \frac{1+x+x^2}{1+2x}$.

7. $f : x \mapsto \frac{1 - \cos x}{x - \ln(1+x)}$.

(a) Déterminer un équivalent simple du dénominateur de f en 0.

(b) À quel ordre suffit-il de calculer les développements limités de $\ln$ et de $\cos$ pour calculer un développement limité à l'ordre 2 en 0 de f ?

(c) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de f .

Exercice 3 – ⚡

Question préliminaire : Soient α et β deux réels strictement positifs. Vérifier que : $(1 + \alpha)(1 + \beta) \geq (1 + \alpha + \beta)$.

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites de réels strictement positifs.

On pose $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 \\ u_1 & 1 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 \\ 0 & u_2 & 1 \end{vmatrix}$ et, pour tout $n \geq 3$:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & u_2 & 1 & -v_3 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & -v_n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & u_n & 1 \end{vmatrix}$$

et on note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = u_n v_n$.

1. Calculer Δ_1 et Δ_2 .
2. Démontrer que :

$$\forall n \geq 3, \quad \Delta_n = \Delta_{n-1} + a_n \Delta_{n-2}.$$

3. Prouver que la suite $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Delta_n \leq \prod_{k=1}^n (1 + a_k)$$

On pourra utiliser un raisonnement par récurrence.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n = \prod_{k=1}^n (1 + a_k)$, $S_n = \sum_{k=1}^n \ln(1 + a_k)$ et on suppose dans cette question que la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge.
 - (a) Prouver que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
 - (b) Que peut-on en déduire pour la suite $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?
 6. On suppose maintenant que la suite $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
 - (a) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta_n \geq 1$.
 - (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$, on pose $t_n = \Delta_n - \Delta_{n-1}$. Étudier la nature de la série : $\sum_{n \geq 2} t_n$.
 - (c) Prouver alors que la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge.
 7. Quel résultat a-t-on finalement établi ?
-