

Entraînement n° 1

MP



La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il faut souligner ou encadrer les résultats.
Bon travail !

Exercice 1

Dans tout le problème, E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3.

Partie I

- Démontrer que deux matrices semblables de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ont même déterminant.
- Soit u un endomorphisme de E et soit i et j deux entiers naturels. On considère l'application w de $\ker u^{i+j}$ vers E définie par : $w(x) = u^j(x)$.
 - Montrer que $\text{Im } w \subset \ker u^i$.
 - En déduire que $\dim(\ker u^{i+j}) \leq \dim(\ker u^i) + \dim(\ker u^j)$.
- Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^3 = 0$ et $\text{rg } u = 2$.
 - Montrer que $\dim(\ker u^2) = 2$. (On pourra utiliser la question 2.b.)
 - Montrer que l'on peut trouver un vecteur a non nul de E tel que $u^2(a) \neq 0$, et en déduire que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de E .
 - Écrire alors la matrice U de u et la matrice V de $u^2 - u$ dans cette base.
- Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^2 = 0$ et $\text{rg } u = 1$.
 - Montrer que l'on peut trouver un vecteur b non nul de E tel que $u(b) \neq 0$.
 - Justifier l'existence d'un vecteur c de $\ker u$ tel que la famille $(u(b), c)$ soit libre, puis montrer que la famille $(b, u(b), c)$ est une base de E .
 - Écrire alors la matrice U' de u et la matrice V' de $u^2 - u$ dans cette base.

Partie II

Soit désormais une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à une matrice du type

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On se propose de montrer que la matrice A est semblable à son inverse A^{-1} .

On pose alors

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et soit une matrice P de $\text{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = T = I_3 + N$.

5. Expliquer pourquoi la matrice A est bien inversible.
6. Calculer N^3 et montrer que $P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2$.
7. On suppose dans cette question que $N = 0$, montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.
8. On suppose dans cette question que $\text{rg } N = 2$. On pose $M = N^2 - N$.
 - (a) En utilisant la question I.3., montrer que la matrice N est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et en déduire une matrice semblable à la matrice M .

- (b) Calculer M^3 et déterminer $\text{rg } M$.
 - (c) Montrer que les matrices M et N sont semblables.
 - (d) Montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.
9. On suppose dans cette question que $\text{rg}(N) = 1$. On pose $M = N^2 - N$. Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.
10. Exemple : soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On note (a, b, c) une base de E et u l'endomorphisme de E de matrice A dans cette base.

- (a) Montrer que $\ker(u - \text{id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 dont on donnera une base (e_1, e_2) .
 - (b) Justifier que la famille (e_1, e_2, c) est une base de E , et écrire la matrice de u dans cette base.
 - (c) Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.
11. Réciproquement, toute matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à son inverse est-elle nécessairement semblable à une matrice du type

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$
