

Interrogation n° 1 – sujet A

MP

septembre 2026



IL EST CONSEILLÉ DE COMMENCER PAR CE QUE VOUS PRÉFÉREZ.

question 1

Trois inégalités classiques sur les fonctions (exp, ln et sin) sont à connaître. Énoncer ces inégalités et démontrer l'une d'elles.

question 2

$f(x) = \frac{1}{1+x}$ pour $x > -1$. Calculer $f^{(n)}(x)$ pour $x > -1$ et $n \in \mathbb{N}$.

question 3

Donner l'expression de u_n , où
$$\begin{cases} u_{n+2} &= 4u_{n+1} - 4u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ u_0 &= 1 \\ u_1 &= 0 \end{cases}.$$

question 4

1. Calculer $\int_1^2 \ln(1+x) dx$.
2. Calculer $\int_{-1}^{\sqrt{2}-1} \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx$.

question 5

1. Réciter trois développements limités au choix à l'ordre 2 en 0.
2. Donner, en démontrant votre réponse, un équivalent de $u_n = \frac{5e^{3n} - 2e^{4n}}{\ln(n+1) - \ln n}$ quand n tend vers l'infini.
3. Donner la limite quand x tend vers 0 de

$$f(x) = \frac{(1 - \cos x)(\sqrt{1+x} - 1)}{x^3}$$

question 6

Donner la nature de $\sum u_n$ et $\sum w_n$ où $u_n = \frac{e^{-n} + \sqrt{n}}{\sin n + n^2}$ et $w_n = e^{-n}$.

question 7

Poser la division euclidienne de $X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38$ par $X^2 - X - 7$.

question 8

Écrire une fonction en `Python` qui prend $n \geq 3$ en paramètre d'entrée et renvoie $\sum_{k=3}^n \frac{1}{k^2 + 3 \ln k + 2}$.

question 9

Soit $n \geq 0$. Montrer que la famille $(1, X + 1, 2X^2 + 1, \dots, nX^n + 1)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

question 10

1. Montrer que $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en donner une famille génératrice.
2. Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 0 = P'(1)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

question 11

1. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}$.
2. Calculer $\sum_{k=3}^{+\infty} 10^{5-k}$.
3. Calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{5^k}{k!}$.
4. Calculer $\sum_{k=3}^{23} (2k + 6)$.

question 12

Pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx$. Montrer que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n}$. Qu'en déduit-on ?

question 13

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A relativement à la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.
Donner l'image et le noyau de f .

question 14

1. Donner les formules pour $\cos(a+b)$ et pour $\sin(2x)$.
2. Effectuer la technique de l'angle moitié sur $1 + e^{i\theta}$.
3. Exprimer $\sin(t)$ en fonction de $\tan(\frac{t}{2})$ en démontrant votre réponse.

question 15

1. Pour A et B deux matrices carrées d'ordre n , donner la formule pour le coefficient du produit en ligne i et colonne j : $[AB]_{i,j}$.

2. Déterminer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Il ne faut pas calculer de déterminant.

question 16

Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ en posant

$$\varphi(P, Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$$

Interrogation n° 1 – sujet B

MP

septembre 2026



IL EST CONSEILLÉ DE COMMENCER PAR CE QUE VOUS PRÉFÉREZ.

question 1

Trois inégalités classiques sur les fonctions (exp, ln et sin) sont à connaître. Énoncer ces inégalités et démontrer l'une d'elles.

question 2

$f(x) = \frac{1}{1-2x}$ pour $x < \frac{1}{2}$. Calculer $f^{(n)}(x)$ pour $x < \frac{1}{2}$ et $n \in \mathbb{N}$.

question 3

Calculer les 3 intégrales

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad J = \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx \quad K = \int_0^1 e^{3x} \cos(2x) dx$$

question 4

Donner l'expression de u_n , où
$$\begin{cases} u_{n+2} &= 3u_{n+1} - 2u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ u_0 &= 3 \\ u_1 &= 5 \end{cases}.$$

question 5

1. Réciter trois développements limités au choix à l'ordre 2 en 0.
2. Donner, en démontrant votre réponse, un équivalent de $u_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sin(n) - 4n}$ quand n tend vers l'infini.
3. Donner la limite quand x tend vers 0 de

$$f(x) = \frac{(\sin(x) - x) \ln(1+x)}{x^4}$$

question 6

1. Donner la formule pour le produit de 2 matrices élémentaires.

2. Déterminer l'inverse de $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Il ne faut pas calculer de déterminant.

question 7

Poser la division euclidienne de $X^5 - X^2 + 2$ par $X^2 + 1$.

question 8

Écrire une fonction `Python`, de paramètre d'entrée $p \in \mathbb{N}$, qui renvoie la liste des termes $u_1, u_2, \dots, u_p$ de la suite donnée par

$$\begin{cases} u_0 &= 5 \\ u_{n+1} &= u_n^2 e^{-u_n} \end{cases}$$

question 9

Soit $n \geq 1$. Montrer que la famille $(5, 1 + X, X + X^2, \dots, X^{n-1} + X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

question 10

1. Montrer que $E = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Montrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une famille génératrice.

question 11

1. Calculer $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{-k}$.
2. Calculer $\sum_{k=5}^{+\infty} 4\left(\frac{1}{3}\right)^k$.
3. Calculer $\sum_{k=1}^{10} 5^k$.
4. Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k! 4^k}$.

question 12

Donner la dérivée de $g : x \mapsto \int_{-x}^{2x} \frac{1}{e^t + 1} dt$ (il ne faut pas tenter de calculer l'intégrale).

question 13

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A relativement à la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.
Donner l'image et le noyau de f .

question 14

1. En illustrant vos résultats sur un cercle trigonométrique, donner $e^{i\frac{\pi}{6}}$, $\sin(\pi - \theta)$ et $\cos(\theta - \frac{\pi}{2})$.
2. Calculer $\sum_{k=1}^n \cos(kt)$.

question 15

1. Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz et préciser le cas d'égalité.
2. Rappeler la définition du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. Traduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans ce cas précis.

question 16

Donner la nature des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$, où :

$$a_n = \frac{n^2 + 4n^3}{n^7 + 1} \text{ et } b_n = ne^{-n}$$
