Révisions – Espaces préhilbertiens réels

Les attentes



1. Savoir démontrer qu'une appication est un produit scalaire.
2. Connaître les produits scalaires canoniques sur $\mathbb{R}^n$ et sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Connaître un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.
3. Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité.
4. Identités remarquables et formule de polarisation (comment obtenir le produit scalaire connaissant la norme ?).
5. Orthogonal d'une partie.
6. En dimension finie, dimension de $F^\perp$.
7. Familles orthogonales, orthonormales. Liberté.
8. Théorème de Pythagore.
9. Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.
10. Expression du projeté orthogonal d'un vecteur x dans une base orthonormée de F.
11. Théorème de distance à un sous-espace vectoriel dans un euclidien.



12. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
13. Théorème de la base orthonormée incomplète.
14. En dimension finie, projeté orthogonal d'un vecteur sur l'hyperplan $\mathrm{Vect}(u)^\perp$; distance de x à $\mathrm{Vect}(u)^\perp$ (savoir effectuer efficacement les calculs).

Dans ce chapitre, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1 Produit scalaire

1.1 présentation et premiers exemples

Définition 1

Un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique, définie positive.
Une application φ est un produit scalaire sur E si elle vérifie :

1. $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$
2. φ est bilinéaire
3. $\forall (x,y) \in E^2, \quad \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$
4. $\forall x \in E, \quad \varphi(x,x) \geqslant 0$
5. $\varphi(x,x) = 0$ implique $x = 0$.

Il suffit de vérifier la linéarité à gauche et la symétrie pour justifier la bilinéarité.
Un produit scalaire est noté $\langle .,. \rangle$ ou $\langle .|. \rangle$, ou $(.|.)$.
On appelle norme euclidienne l'application, qui est en fait une norme sur E, définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x|x \rangle}$.

Remarques :

— Dire qu'un produit scalaire est une forme bilinéaire positive ne signifie pas qu'un produit scalaire est à valeurs positives, mais que pour tout vecteur x, $\langle x|x \rangle \geqslant 0$.

— Pour tout x de E, on a $\langle x|0_E \rangle = 0$ et en particulier $\langle 0_E|0_E \rangle = 0$.

— Pour $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ et $(w_j)_{1 \leqslant j \leqslant s}$ familles de vecteurs de E et $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ et $(\mu_j)_{1 \leqslant j \leqslant s}$ familles de réels, on a :

$$\left\langle \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i \middle| \sum_{j=1}^{s} \mu_j w_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \lambda_i \mu_j \langle v_i | w_j \rangle$$

— Pour x vecteur non nul, le vecteur $\dfrac{1}{\|x\|} x$, qu'on écrit le plus souvent $\dfrac{x}{\|x\|}$, est de norme 1. Quand on divise un vecteur v non nul par sa norme, on dit qu'on a normé le vecteur v.

Définition 2

On appelle *espace préhilbertien réel* tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
Un espace préhilbertien réel de dimension finie est appelé *espace euclidien*.

$$\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a) Q^{(k)}(a) \qquad \text{est un produit scalaire sur } E.$$

Exercice 1 : Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Montrer que l'application φ définie sur E^2 par

$$\varphi(P,Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)\mathrm{d}x \qquad \text{est un produit scalaire sur } E.$$

1.2 exemples à maîtriser

1. **Espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique**
   Pour n entier naturel non nul, le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ est donné par :

$$\text{pour tous } x=(x_1,x_2,\dots,x_n) \text{ et } y=(y_1,y_2,\dots,y_n) \text{ de } \mathbb{R}^n, \quad \langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^\top Y$$

   où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

2. **Espace euclidien $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ou plus rarement, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$) muni du produit scalaire** $\mathrm{Tr}(A^\top B)$
   Pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}(A^\top B) =$

   et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de ce produit scalaire est un espace euclidien.

3. **Un produit scalaire intégral dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$**
   $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),\langle .|.\rangle)$ est un espace préhilbertien réel, où $\langle f|g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$

4. **Un produit scalaire intégral dans $\mathbb{R}[X]$**
   $(\mathbb{R}[X],\langle .|.\rangle)$ est un espace préhilbertien réel, où $\langle P|Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$
   Il y a de nombreux produits scalaires sur $\mathbb{R}[X]$!

1.3 propriétés

Propriété 1

Pour x et y vecteurs de E, on a :

- Identités remarquables :

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \|x\|^2+\|y\|^2+2\langle x|y\rangle \\ \|x-y\|^2 &= \|x\|^2+\|y\|^2-2\langle x|y\rangle \\ \|x\|^2-\|y\|^2 &= \langle x+y|x-y\rangle \end{aligned}$$

- Formules de polarisation associées :

$$\langle x|y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2\right)$$

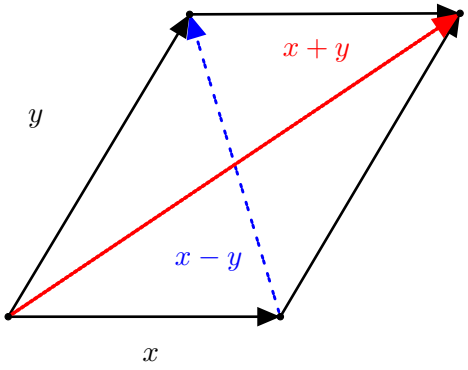
$$\langle x|y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)$$

- Règle du parallélogramme :

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2\|x\|^2+2\|y\|^2$$

Un peu de géométrie :

- La règle du parallélogramme dit que la somme des carrés des longueurs des quatre côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs de ses deux diagonales.
- Si x et y sont de même norme, alors $x+y$ et $x-y$ sont orthogonaux. Géométriquement, les diagonales d'un losange sont perpendiculaires.



Propriété 2 – Théorème de Pythagore

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \text{si, et seulement si,} \quad \langle x|y\rangle = 0$$

Propriété 3 – Inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour tous vecteurs x et y de E, on a : $|\langle x|y\rangle| \leqslant \|x\|.\|y\|$

Il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si, et seulement si, la famille (x,y) est liée.

Corollaire 1

Pour tout $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, tout $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, on a :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

Pour f et g fonctions continues sur $[a,b]$, on a :

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b (f(t))^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b (g(t))^2\,\mathrm{d}t}$$

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b (f(t))^2\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b (g(t))^2\,\mathrm{d}t\right)$$

Exercice 2 : Pour f et g fonctions continues sur $[a,b]$, montrer :

$$\int_a^b |f(t)g(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\int_a^b (f(t))^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b (g(t))^2\,\mathrm{d}t}$$

Propriété 4 – Inégalité triangulaire

Pour tous vecteurs x et y de E, on a l'inégalité triangulaire :

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

Il y a égalité si, et seulement si, x et y sont colinéaires et de même sens (il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que $x = \alpha y$ ou tel que $y = \alpha x$).

On a aussi la deuxième inégalité triangulaire :

$$|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x-y\|$$

2 Familles orthogonales, orthonormales

2.1 propriétés des familles orthogonales

Définition 3 – Notions d'orthogonalité

Soient x et y deux vecteurs de E, $\mathcal{F} = (v_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E,
et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
– *Vecteurs*
x et y sont orthogonaux si $\langle x|y\rangle = 0$.

– *Famille de vecteurs*
$\mathcal{F}$ est une famille orthogonale si pour tous i et j de I avec $i \neq j$, $\langle v_i|v_j\rangle = 0$.
$\mathcal{F}$ est une famille orthonormale (ou orthonormée) si $\mathcal{F}$ est une famille orthogonale constituée de vecteurs de norme 1.

– *Ensembles*
F et G sont des sous-espaces orthogonaux si tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G : $\quad \forall (f,g) \in F \times G, \quad \langle f|g\rangle = 0$.

Propriété 5

Normer les vecteurs d'une famille orthogonale sans vecteur nul, donne une famille orthonormale.

Exercice 3 : Vérifier que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. Vérifier que la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est orthonormée pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Exercice 4 : Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'espace préhilbertien réel $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour k compris entre 0 et n, $Q_k(X) = (1+X)^k(1-X)^k$ et $P_k = Q_k^{(k)}$.

1. Pour $j < k$, que vaut $Q_k^{(j)}(1)$?
2. Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une famille orthogonale de E.

Propriété 6

Toute famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est libre.
Toute famille orthonormale est libre.

Soit $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ une famille orthogonale de E. On a le théorème de Pythagore généralisé :

$$\|v_1 + v_2 + \cdots + v_p\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \cdots + \|v_p\|^2$$

2.2 bases orthonormales dans un espace euclidien

Propriété 7 – Écriture d'un vecteur dans une base orthonormée

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Pour tout x de E :

$$x = \langle x|e_1\rangle e_1 + \langle x|e_2\rangle e_2 + \cdots + \langle x|e_n\rangle e_n$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x|e_i\rangle e_i$$

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x|e_i\rangle^2$$

Propriété 8

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. On note X et Y les matrices colonnes des coordonnées de x et y dans $\mathcal{B}$. On a :

$$\langle x|y\rangle = X^\top Y \qquad \text{et} \qquad \|x\|^2 = X^\top X$$

Propriété 9 – procédé d'orthonormalisation

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une famille **libre** de E. Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt consiste à définir les vecteurs $s_1, s_2, \dots, s_p$ comme suit :

$$s_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$$

$$\text{pour } i \geqslant 2, \quad s_i = \frac{u_i}{\|u_i\|} \quad \text{où} \quad u_i = e_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle e_i|s_k\rangle s_k$$

La famille $(s_1, s_2, \dots, s_p)$ ainsi construite est une famille orthonormale et

$$\forall r \in [\![1, p]\!], \text{ on a} \quad \text{Vect}(s_1, s_2, \dots, s_r) = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_r)$$

Exercice 5 : Orthonormaliser la famille $(1, X, X^2)$ pour le produit scalaire $\langle P|Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème 1

Tout espace euclidien possède une base orthonormée.
Toute famille orthonormée d'un espace euclidien E peut être complétée en base orthonormée de E.

3 Orthogonal d'une partie

Définition - propriété 1

Soit A une partie de E. *L'orthogonal de* A, noté $A^\perp$, est l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A.

$$A^\perp = \{x \in E \,|\, \forall y \in A,\ \langle x|y\rangle = 0\}$$

C'est un sous-espace vectoriel de E. On a : $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$.

Exercice 6 :

1. Reconnaître l'orthogonal d'un espace pour $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x - 7y = 0\}$. Dans le plan, quel est un vecteur normal $\vec{n}$ de la droite d'équation $-7y + 2x = 0$?
2. Reconnaître l'orthogonal d'un espace pour $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - z = 0\}$. Dans l'espace, quel est un vecteur normal $\vec{n}$ du plan d'équation $x + y - z = 0$?

Remarque : soit $F = \text{Vect}(f_1, f_2, \ldots, f_p)$. Pour montrer qu'un vecteur x est orthogonal à tout vecteur de F, il suffit de montrer que x est orthogonal à tout vecteur d'une famille génératrice de F.

$$x \in F^\perp \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in [\![1, p]\!],\ \langle x|f_i\rangle = 0$$

Par exemple, complétons les équivalences suivantes.

$$P \in (\text{Vect}(X^7 - 1, X^3, X^7 + X^2))^\perp \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \right.$$

$$f \in (\text{Vect}(x \mapsto \sin x, x \mapsto \cos x))^\perp \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \right.$$

Propriété 10

$\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$.
Le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à tous les vecteurs de E.



F et G sont orthogonaux $\Leftrightarrow F \subset G^\perp \Leftrightarrow F \perp G \Leftrightarrow G \subset F^\perp$
Il n'y a pas forcément égalité.

Propriété 11

Soit E un espace préhilbertien réel (de dimension finie ou non) et F un sous-espace vectoriel **de dimension finie** de E.

- $F^\perp$ est un supplémentaire de F orthogonal à F, et c'est même le seul. On l'appelle *supplémentaire orthogonal* de F.
$$F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = E$$
- On a $(F^\perp)^\perp = F$.

Propriété 12

Soit E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E.

$$\dim F \ + \ \dim F^\perp \ = \ \dim E$$

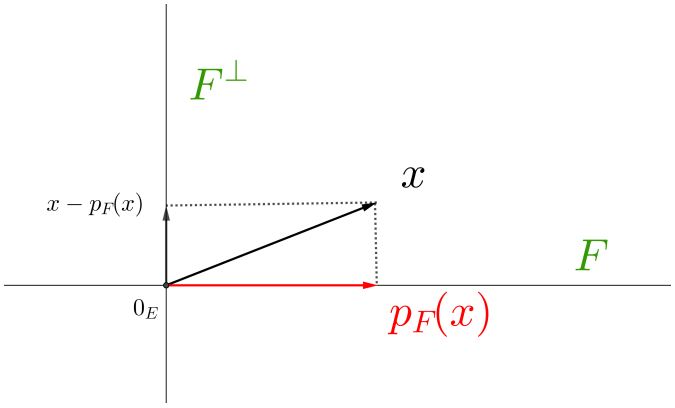
Exercice 7 :

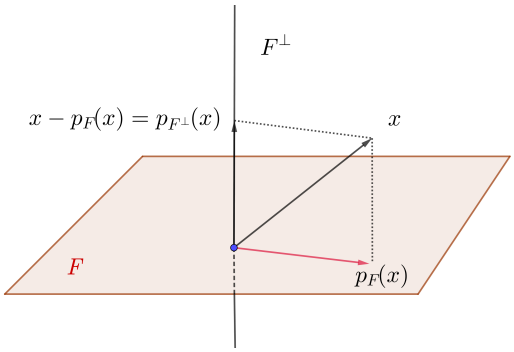
1. Donner un supplémentaire de $D = \text{Vect}\,((1,1))$ dans $\mathbb{R}^2$. Nous commenterons.
2. Donner l'orthogonal de $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x - 3y + z = 0\}$.
3. Donner l'orthogonal dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de $\ker \text{Tr}$.

4 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Définition 4

On suppose que F est un sous-espace vectoriel de E pour lequel $F \oplus F^\perp = E$.
On appelle projection orthogonale sur F, la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.





Propriété 13 – Caractérisation de $p_F(x)$

$p_F(x)$ est caractérisé par : $\begin{cases} p_F(x) & \in F \\ x - p_F(x) & \in F^\perp \end{cases}$

En écrivant ces deux conditions, on obtient des équations qui nous permettront de trouver $p_F(x)$.

Exercice 8 : En s'aidant, pour comprendre, d'un schéma, montrer que pour tout $x \in E$, on a $\|p_F(x)\| \leqslant \|x\|$.

Propriété 14 – Expression de $p_F(x)$ dans une base orthonormée de F

On considère la projection orthogonale sur F, notée p_F.
Soit $(v_1, v_2, \dots v_p)$ une base orthonormale de F. On insiste sur le fait que $p = \dim F$. Pour tout x de E, on a :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x | v_i \rangle v_i$$

4.1 distance à un sous-espace de dimension finie

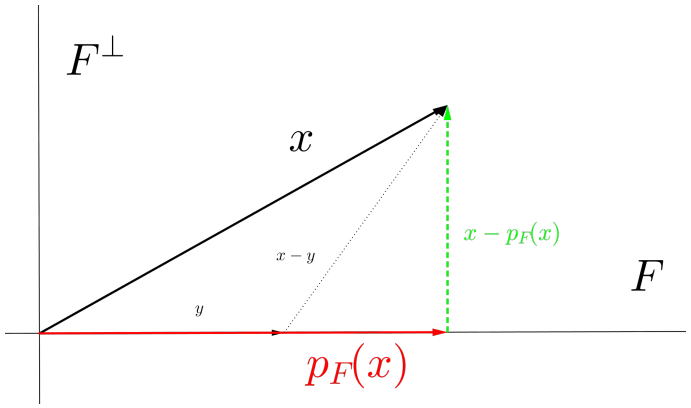
La distance de x à l'ensemble A est $d(x,A) = \inf_{a\in A} \|x-a\|$.

Théorème 2

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et $x \in E$. La distance de x à F est atteinte en $p_F(x)$, où p_F désigne la projection orthogonale sur F. Autrement dit,

$$d(x,F) = \|x - p_F(x)\|$$

De plus, $p_F(x)$ est l'unique vecteur y de F tel que $d(x,F) = \|x-y\|$.



Exercice 9 (CCINP 2023) : On note $E = \mathbb{R}_2[X]$.
Dans cet exercice, on pourra utiliser sans démonstration que, pour tout entier naturel n, la fonction $x \longmapsto x^n e^{-x}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = n!$.

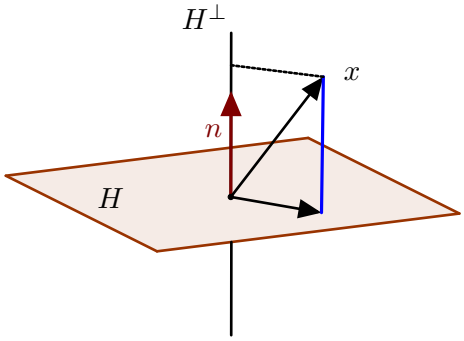
1. Démontrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant, pour tout couple (P,Q) de polynômes de E, $< P,Q >= \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x$. On notera $\|\quad\|$ la norme euclidienne associée.
2. Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $F = \mathbb{R}_1[X]$ noté $P_F(X^2)$.
3. Justifier que $\| X^2 - P_F(X^2) \|^2 = \| X^2 \|^2 - \| P_F(X^2) \|^2$ puis calculer le réel :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (x^2 - ax - b)^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

4.2 cas particulier des hyperplans

Soit E un espace euclidien de dimension non nulle et H un hyperplan de E.
Il existe un vecteur non nul n de E tel que $H = (\text{Vect}(n))^{\perp}$. Un tel vecteur n est un *vecteur normal* à l'hyperplan H.

- Le projeté orthogonal de x sur $\text{Vect}(n)$ est



- Le projeté orthogonal de x sur H est

- La distance de x à H est

Exercice 10 : On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.
Quelle est la dimension de $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2,\ x - y + 2z = 0\}$? Donner la distance de $(1, 1, 1)$ à F.

5 Annexe : quelques éléments de démonstrations

Inégalité de Cauchy-Schwarz en page 4

Soient x et y deux vecteurs de E. On introduit :

$$\begin{aligned} P(t) &= \|tx+y\|^2 = \langle tx+y|tx+y\rangle \\ &= t^2\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2t\langle x|y\rangle \end{aligned}$$

P est un polynôme ; il est du second degré si, et seulement si, $x \neq 0$.

Premier cas : $x \neq 0$
On a $P(t) \geqslant 0$ pour tout t, donc P est de signe constant, donc $\Delta \leqslant 0$.
Donc $4\left(\langle x|y\rangle^2 - \|x\|^2\|y\|^2\right) \leqslant 0$ et donc

$$|\langle x \,|\, y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$$

De plus :

il y a égalité dans cette égalité	si, et seulement si,	$\Delta = 0$
	si, et seulement si, (on sait que P a 0 ou 1 racine)	il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\|t_0x+y\|^2 = P(t_0) = 0$
	si, et seulement si,	il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $t_0x + y = 0$

Deuxième cas : $x = 0$
On a l'égalité : $|\langle x \,|\, y\rangle| = 0 = \|x\|\,\|y\|$.

En conclusion, on a toujours l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Et on a égalité si, et seulement si, x est nul, ou ($x \neq 0$ et (x, y) est liée), donc en résumé on a bien égalité si, et seulement si, (x, y) est liée.

Inégalité triangulaire en page 5

On a :

$$\begin{aligned} (\|x\|+\|y\|)^2 - \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| - \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x|y\rangle\right) \\ &= 2\left(\|x\|\|y\| - \langle x|y\rangle\right) \\ &\geqslant 0 \text{ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \\ \text{donc } \|x\| + \|y\| &\geqslant \|x+y\| \end{aligned}$$

• S'il y a égalité dans l'inégalité triangulaire, alors $\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|$, et par le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, (x, y) est liée.
Soit $x = 0$ (et $x = 0y$), soit $x \neq 0$ et il existe a réel tel que $y = ax$. Auquel cas, $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ fournit $|1+a| = 1+|a|$.
Le cas $a < -1$ est exclu car il conduit à $a - 1 = 1 - a$ ($a = 1$). Le cas $-1 \leqslant a < 0$ est exclu car il conduit à $1 + a = 1 - a$ soit $a = 0$. Donc $a \in \mathbb{R}^+$.
S'il y a égalité dans l'inégalité triangulaire, alors il existe $a \in \mathbb{R}^+$ tel que $y = ax$.
• Réciproquement, s'il existe $a \in \mathbb{R}^+$ tel que $y = ax$, alors

$$\|x+y\| = |1+a|\|x\| = (1+a)\|x\| = \|x\| + \|ax\| = \|x\| + \|y\|$$

Propriété 6 en page 6

Soit $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille orthogonale de vecteurs de E **ne contenant pas le vecteur nul**. Montrons que cette famille est libre.
Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ des scalaires tels que $\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \cdots + \alpha_pv_p = 0_E$. En particulier, pour $i \in [\![1, p]\!]$:

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \cdots + \alpha_pv_p | v_i\rangle &= \langle 0_E|v_i\rangle = 0 \\ &\quad \text{par linéarité à gauche :} \\ \alpha_1\langle v_1|v_i\rangle + \alpha_2\langle v_2|v_i\rangle + \cdots + \alpha_p\langle v_p|v_i\rangle &= 0 \\ &\quad \text{et comme la famille de vecteurs est orthogonale :} \\ 0 + \cdots + 0 + \alpha_i\langle v_i|v_i\rangle + 0 + \cdots + 0 &= 0 \\ \alpha_i\|v_i\|^2 &= 0 \end{aligned}$$

Enfin, comme aucun des vecteurs n'est nul, $\|v_i\| \neq 0$, et donc $\alpha_i = 0$.
La famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est libre.

Une famille orthonormale est en particulier une famille orthogonale qui ne contient pas le vecteur nul (tous ses vecteurs sont de norme 1, donc non nuls). Par ce qui précède, une famille orthonormale est donc libre.

Généralisation du théorème de Pythagore en page 6

Soit $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ une famille orthogonale de vecteurs de E. Par bilinéarité du produit scalaire au passage $(*)$:

$$\begin{aligned}
\|v_1 + v_2 + \cdots + v_p\|^2 &= \langle v_1 + v_2 + \cdots + v_p | v_1 + v_2 + \cdots + v_p \rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{p} v_i \Big| \sum_{j=1}^{p} v_j \right\rangle \underset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \langle v_i | v_j \rangle \\
&\quad \text{comme la famille est orthogonale, pour } i \neq j,\ \langle v_i | v_j \rangle = 0 \\
&= \sum_{i=1}^{p} (0 + \cdots + 0 + \langle v_i | v_i \rangle + 0 + \cdots + 0) = \sum_{i=1}^{p} \|v_i\|^2
\end{aligned}$$

Définition-propriété 1 en page 7

En relisant la définition de $A^\perp$, on a $A^\perp \subset E$ (1).
De plus, pour tout vecteur y de A, on a $\langle 0_E | y \rangle = 0$ (c'est une propriété du vecteur 0_E). Donc $0_E \in A^\perp$ (2).
Soient $(x, x') \in (A^\perp)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Pour tout $y \in A$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle \lambda x + \mu x' | y \rangle &= \lambda \langle x | y \rangle + \mu \langle x' | y \rangle \text{ (bilinéarité du produit scalaire)} \\
&= \lambda.0 + \mu.0 \text{ car } x \text{ et } x' \text{ sont orthogonaux à tous les } y \text{ de } A \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi $\lambda x + \mu x'$ est orthogonal à tous les vecteurs de A, autrement dit appartient à $A^\perp$.
$\forall (x, x') \in (A^\perp)^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda x + \mu x' \in A^\perp$ (3).

Propriété 7

Soit $(e_1, \dots, e_2, \dots, e_n)$ une base **orthonormée** de E. Soit $x \in E$. x s'écrit $\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle x | e_k \rangle &= \langle x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n | e_k \rangle \\
&\quad \text{par linéarité à gauche du produit scalaire :} \\
&= x_1 \langle e_1 | e_k \rangle + x_2 \langle e_2 | e_k \rangle + \cdots + x_n \langle e_n | e_k \rangle \\
&\quad \text{et comme la famille } (e_1, e_2, \dots, e_n) \text{ est orthonormale :} \\
&= x_1.0 + \cdots + x_{k-1}.0 + x_k.1 + x_{k+1}.0 + \cdots + x_n.0 \\
&= x_k
\end{aligned}$$

Les coordonnées de x dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ sont données par $x_k = \langle x | e_k \rangle$.

Avec ces notations, on a aussi par bilinéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \Big| \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \langle e_i | e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} x_j \langle e_i | e_j \rangle \\
&\quad \text{et comme la famille } (e_1, e_2, \dots, e_n) \text{ est orthonormale :} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i (0 + \cdots + 0 + x_i.1 + 0 + \cdots + 0) \\
\sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} \langle x | e_i \rangle^2
\end{aligned}$$

Propriété 8 en page 6

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. On note X et Y les matrices colonnes des coordonnées de x et y dans $\mathcal{B}$.
On a :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{où } x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{où } y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \cdots + y_n e_n$$

$$\begin{aligned}
\langle x|y\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \Big| \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle e_i|e_j\rangle \text{ (bilinéarité du produit scalaire)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j \langle e_i|e_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(0 + \cdots + 0 + y_i + 0 + \cdots + 0\right) \text{ ($\mathcal{B}$ est une famille orthonormale)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^\top . Y
\end{aligned}$$

Procédé de Schmidt en page 6

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une famille libre de E. On définit les vecteurs $(s_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ par

$$s_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$$

$$\text{pour } i \geqslant 2, \quad s_i = \frac{u_i}{\|u_i\|} \quad \text{où} \quad u_i = e_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle e_i|s_k\rangle s_k$$

Pour $n \in [\![1, p]\!]$, on nomme $\mathcal{P}_n$ la propriété :

« $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ est une famille orthonormale et pour $r \leqslant n$, Vect $< s_1, s_2, \dots, s_r >$ = Vect $< e_1, e_2, \dots, e_r >$ »

et on la démontre par récurrence finie.

• s_1 est un vecteur de norme 1 et on a
Vect $< s_1 >$ = Vect $< v_1 >$. $\mathcal{P}_1$ est vraie.

• supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain entier n compris entre 1 et $p-1$.
On rappelle que $u_{n+1} = e_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \langle e_i|s_k\rangle s_k$.
D'après $\mathcal{P}_n$, on a Vect $< s_1, s_2, \dots, s_n >$ = Vect $< e_1, e_2, \dots, e_n >$. Comme $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est libre, e_{n+1} n'est pas combinaison linéaire de $e_1, e_2, \dots, e_n$, donc e_{n+1} n'est pas combinaison linéaire de $s_1, s_2, \dots, s_n$ et donc $u_{n+1} \neq 0$. Cela a bien un sens de considérer $s_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{\|u_{n+1}\|}$, et ce vecteur est de norme 1.

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a (par linéarité à droite) :

$$\begin{aligned}
\langle u_{n+1}|s_k\rangle &= \langle e_{n+1}|s_k\rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle e_{n+1}|s_j\rangle\langle s_j|s_k\rangle \\
&= \langle e_{n+1}|s_k\rangle - (0 + 0 + \cdots + 0 + \langle e_{n+1}|s_k\rangle .1 + 0 + 0 + \cdots + 0) \\
&\quad \text{car } (s_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \text{ est orthonormale, par } \mathcal{P}_n \\
&= 0 \\
\langle s_{n+1}|s_k\rangle &= \left\langle \frac{u_{n+1}}{\|u_{n+1}\|} | s_k \right\rangle \\
&= \frac{1}{\|u_{n+1}\|}\langle u_{n+1}|s_k\rangle = \frac{1}{\|u_{n+1}\|}.0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

On sait déjà que la famille $(s_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est orthonormale ; on obtient là : la famille $(s_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ est orthonormale.

De plus, par hypothèse de récurrence, Vect $< s_1, s_2, \dots, s_n >$ = Vect $< e_1, e_2, \dots, e_n >$, et par définition de s_{n+1}, s_{n+1} est combinaison linéaire de $e_{n+1}, s_1, s_2, \dots, s_n$, donc
Vect $< s_1, s_2, \dots, s_{n+1} >$ $\subset$ Vect $< e_1, e_2, \dots, e_{n+1} >$.

Enfin, $(s_1, s_2, \dots, s_{n+1})$ est une famille orthonormale donc c'est une famille libre.
On a donc dim (Vect $< s_1, s_2, \dots, s_{n+1} >$) $= n+1$.
Par ailleurs, $(e_1, e_2, \dots, e_{n+1})$ est libre (sous-famille de la famille libre $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$), donc dim (Vect $< e_1, e_2, \dots, e_{n+1} >$) $= n+1$.
On a une inclusion et égalité des dimensions donc Vect $< s_1, s_2, \dots, s_{n+1} >$ = Vect $< e_1, e_2, \dots, e_{n+1} >$.
$\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

Théorème 1 en page 7

• Comme E est un espace vectoriel de dimension finie, il existe une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E. C'est une famille libre de E. Par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, il existe une famille orthonormale $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ de E. Toute famille orthonormale est libre donc $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ est une famille libre de E.
Comme E est de dimension n, cette famille libre à n vecteurs est une base de E.
Autre rédaction : dans le procédé de Schmidt, pour tout $r \in [\![1, n]\!]$, on a
$\text{Vect}(w_1, w_2, \dots, w_r) = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_r)$.
En particulier, $\text{Vect}(w_1, w_2, \dots, w_n) = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n) = E$. La famille $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ est donc une famille génératrice de E.
En conclusion, il existe une base orthonormée de E.

• Soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une famille orthonormée de E. C'est une famille libre de E. Par le théorème de la base incomplète, on peut compléter cette famille en base $(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E. Par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, il existe une base $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ de E. En relisant la construction des vecteurs dans le procédé de Schmidt :

$$w_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$$

$$\text{pour } i \geqslant 2,\ w_i = \frac{u_i}{\|u_i\|} \text{ où } u_i = e_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle e_i | w_k \rangle w_k$$

on s'aperçoit que $(e_1, e_2, \dots, e_p)$, déjà orthonormée, n'est pas modifiée par le procédé, c'est-à-dire que
$w_1 = e_1,\ w_2 = e_2,\ \dots, w_p = e_p$.
On trouve donc : $(e_1, e_2, \dots, e_p, w_{p+1}, \dots, w_n)$ est une famille orthonormée de E, et comme expliqué au premier point, c'est une base de E.
En conclusion, toute famille orthonormée de E peut être complétée en base orthonormée de E.

Propriété 11

Remarquons que si $F = \{0\}$, on a $F^\perp = E$ et $\{0\} \oplus E = E$, donc $F \oplus F^\perp = E$. De même si $F = E$, car alors $F^\perp = \{0\}$. Dans la suite, on suppose que F n'est pas réduit à $\{0\}$.

• Cas où E est de dimension finie. (ce n'est pas nécessaire de distinguer ce cas, son seul mérite est de donner concrètement $F^\perp$).
Nous considérons F un sous-espace vectoriel de E de dimension p comprise entre 1 et $n-1$, où $n = \dim E$. Il existe une base orthonormée $(b_1, b_2, \dots, b_p)$ de F, qu'on complète en $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ base orthonormée de E.
Montrons que $F^\perp = \text{Vect}(b_{p+1}, b_{p+2}, \dots, b_n)$.
Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$ un vecteur de E. On a :

$$\begin{aligned}
x \in F^\perp &\Leftrightarrow \forall j \in [\![1, p]\!],\ \langle x | b_j \rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall j \in [\![1, p]\!],\ \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i b_i \middle| b_j \right\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall j \in [\![1, p]\!],\ \sum_{i=1}^{n} x_i \langle b_i | b_j \rangle = 0 \text{ par linéarité à gauche} \\
&\Leftrightarrow \forall j \in [\![1, p]\!],\ 0 + 0 + \dots + 0 + x_j.1 + 0 + 0 + \dots + 0 = 0 \text{ car la famille } (b_i) \text{ est orthonormale} \\
&\Leftrightarrow x = \sum_{i=p+1}^{n} x_i b_i
\end{aligned}$$

donc $F^\perp = \text{Vect}(b_{p+1}, b_{p+2}, \dots, b_n)$.
Comme la famille $(b_i)_{p+1 \leqslant i \leqslant n}$ est orthonormale, elle est libre, et c'est donc une base de $F^\perp$.
Donc $\dim F^\perp = n - p$ et donc $\dim F + \dim F^\perp = n$.

• On a montré que $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ et vérifie facilement que $F \cap F^\perp = \{0\}$. Par propriété, $F \oplus F^\perp = E$.

• Par le premier point, $\dim (F^\perp)^\perp = \dim E - \dim F^\perp = \dim F$. Montrons que $F \subset (F^\perp)^\perp$ pour obtenir $(F^\perp)^\perp = F$.
Soit $x \in F$; soit $y \in F^\perp$. On a $\langle x | y \rangle = 0$. Donc x est orthogonal à tous les vecteurs de $F^\perp$, soit $x \in (F^\perp)^\perp$ $(*)$.
$F \subset (F^\perp)^\perp$ puis $F = (F^\perp)^\perp$.

Cas général
• On vérifie facilement que $F \cap F^\perp = \{0\}$. Montrons que $E \subset F + F^\perp$. Soit une base orthonormée $(b_1, b_2, \dots, b_p)$ de F.

Soit $x \in E$. On remarque que

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \langle x|b_i\rangle b_i}_{\in F} + \underbrace{x - \sum_{i=1}^{p} \langle x|b_i\rangle b_i}_{\in F^\perp}$$

Donc $x \in F + F^\perp$.
Ainsi $E = F \oplus F^\perp$.

• Montrons que $F^\perp$ est le seul supplémentaire de F dans E orthogonal à F. Soit G un tel supplémentaire.

De $G \perp F$, on déduit $G \subset F^\perp$. Réciproquement, soit $x \in F^\perp$. On décompose x dans la somme directe $F \overset{\perp}{\oplus} G = E : x = f + g$. Comme on veut montrer que f est nul, une idée est de calculer $\|f\|^2$.

$$\|f\|^2 = \langle f|f\rangle = \langle x - g|f\rangle = \langle x|f\rangle - \langle g|f\rangle = 0 - 0 = 0$$

Donc $f = 0$, donc $x = g \in G$.

• Montrons que $F = (F^\perp)^\perp$. On montre l'inclusion $F \subset (F^\perp)^\perp$ (fait en $(*)$ ci-dessus).
Réciproquement, soit $x \in (F^\perp)^\perp$.

On décompose x dans la somme directe $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = E : x = f + g$ (décomposition établie grâce au fait que F est de dimension finie). On veut montrer que $g = 0$. D'où l'idée de calculer $\|g\|^2$.

$$\|g\|^2 = \langle x - f|g\rangle = \langle x|g\rangle - \langle f|g\rangle = 0 - 0$$

Donc $g = 0$ et $x \in F$.