# Calcul différentiel

**Les attentes**

1. Savoir définir la dérivée de l'application $f$ au point $a$ selon la direction du vecteur $v$.
2. Pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la dérivée partielle de $f$ selon la $i$-ième variable est la dérivée de $f$ selon le $i$-ième vecteur de la base canonique.
3. Être à l'aise dans le calcul de dérivées partielles et de dérivées partielles secondes. Être à l'aise sur la dérivée de « composées » : règle de la chaîne dans des calculs pratiques. Il faut savoir dériver $t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ et il faut savoir calculer les dérivées partielles de
$$(u_1, \dots, u_m) \mapsto f(x_1(u_1, \dots, u_m), \dots, x_n(u_1, \dots, u_m))$$



4. Savoir définir « $f$ est différentiable en $a$ ».
5. Si $f$ est différentiable en $a$, il faut savoir exprimer $\mathrm{d}f(a)$ à l'aide des dérivées partielles de $f$ en $a$.
6. Développement limité à l'ordre 1.
7. Savoir définir : « $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$ ».
8. Interprétation géométrique : si $\nabla f(a) \neq 0$, $\nabla f(a)$ est positivement colinéaire au vecteur unitaire $u$ selon lequel la dérivée directionnelle $\mathrm{D}_u f(a)$ de $f$ en $a$ est maximale.
9. Théorème de Schwarz. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2.
10. Être familiarisé avec des équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre. Entre autres, il faut savoir primitiver en fonction de telle ou telle variable.
11. Exercices-types : savoir montrer qu'une fonction définie par morceaux est (ou n'est pas) continue / différentiable / $\mathcal{C}^1$.

12. Unicité de la différentielle et relation $\mathrm{d}f(a)(v) = \mathrm{D}_v f(a)$, ou encore $\langle \nabla f(a), v \rangle$ dans un euclidien.
13. Si $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si $f$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, la matrice jacobienne de $f$ en $a$ est la matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans les bases canoniques.



14. Différentielle d'une composée ; traduction avec les matrices jacobiennes.
15. Formule d'intégration le long d'un arc.
16. Si $\Omega$ est connexe par arcs, caractérisation des fonctions constantes sur $\Omega$.
17. Ensemble des vecteurs tangents en un point à un partie. Exemples : sous-espace affine, sphère d'un espace euclidien, graphe d'une fonction numérique définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
18. Théorème d'obtention de $T_x X$ lorsque $X = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}$.

Les fonctions considérées dans cette section sont définies sur un ouvert d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé $E$ de dimension finie et à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé $F$ de dimension finie.
La notion d'ouvert sera approfondie au chapitre Topologie. Il nous suffit de savoir pour l'instant que si $\mathcal{U}$ est un ouvert, pour $a \in \mathcal{U}$, pour $v \in E$, pour $t$ réel suffisamment proche de 0, on a $a + tv \in \mathcal{U}$.
Par exemple, $]0, +\infty[$, $]-3, 6[\cup]7, 8[$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$. $]0, +\infty[\times]0, 1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
*Le choix d'une base de l'espace d'arrivée permet de se ramener au cas des fonctions à valeurs réelles.*

# 1 Introduction avec les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

Dans cette première partie d'introduction, on considère un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction réelle de deux variables.

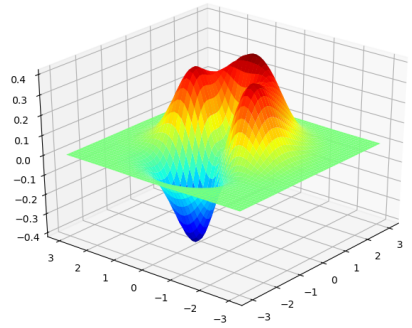
## 1.1 visualisation

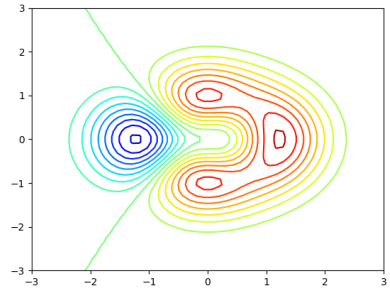
Le graphe de $f$ est l'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$.
La courbe de niveau $m$, où $m$ est un réel fixé, est l'ensemble des couples $(x, y)$ tels que $f(x, y) = m$.

Carte IGN

Surface

courbes de niveaux








On peut utiliser Python, ayant déjà défini $f$.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
n = 50
x = np.linspace (-2,2,n)
y = np.linspace (-2,2,n)
X,Y = np.meshgrid (x,y)
Z = f(X,Y)

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection="3d", elev = 23, azim = -133)
ax.set_position([0, 0, 0.95, 1])
ax.plot_surface (X , Y , Z ) # Surface
plt.contour(X,Y,Z,levels=16,cmap=cm.jet) # Lignes de niveaux
plt.show()
```

## 1.2 limites et continuité

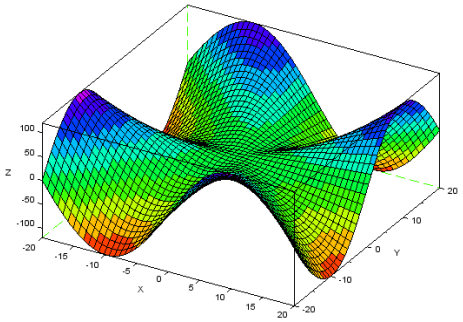
Dans $\mathbb{R}^2$, $(x,y) \to (x_0,y_0)$ si $\|(x,y)-(x_0,y_0)\|$ tend vers 0. Dans ce cas, $x \to x_0$ et $y \to y_0$. Il faut cependant faire attention à ne pas se retrouver avec des double-limites.

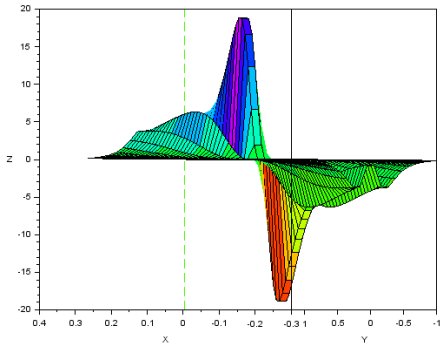
Exercice 1 : (B.E.O. numéro 57) Montrer que l'application suivante est continue sur $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Exercice 2 :

1. $g(x,y) = x^2+y^2+3$. $g$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, et en particulier en $(0,0)$. Nous visualisons plusieurs approches possibles de $(0,0,3)$ sur la surface.
2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{8x^3y^3}{(x^2+y^2)^3} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Montrer que $f$ n'est pas continue en $(0,0)$.





## 1.3 dérivées directionnelles et dérivées partielles d'ordre 1

**Définition 1 – dérivée directionnelle**

Soit $u \in \mathbb{R}^2$. On dit que $f$ est dérivable en $a=(x_0,y_0)$ suivant la direction $u$ si la fonction $g$ à une variable :

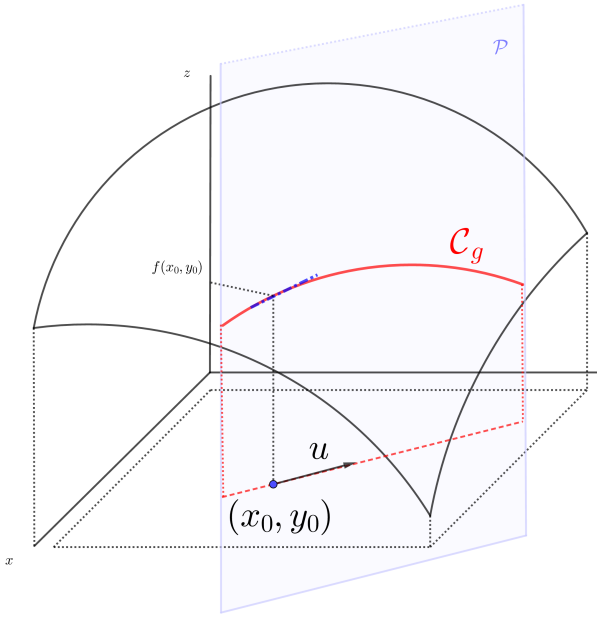
$$g : t \mapsto f(a+tu)$$

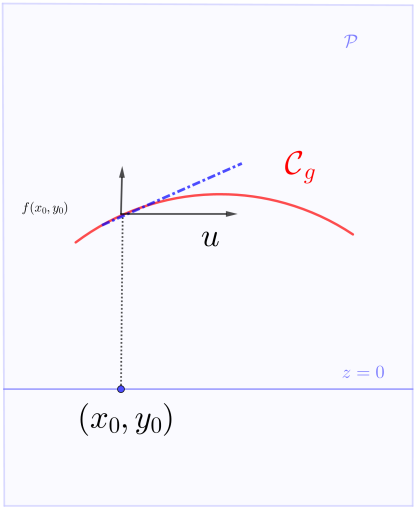
est dérivable en 0.

La dérivée directionnelle de $f$ en $a$ selon la direction $u$ est alors :

$$\mathrm{D}_u f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu)-f(a)}{t}$$

Pour pouvoir interpréter le nombre dérivé comme une pente, comme on en a l'habitude, il faut considérer un vecteur $u$ de norme 1.




**Définition 2 – dérivées partielles**

Les dérivées partielles sont les dérivées directionnelles de $f$ dans les directions $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$. On les note $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$, ou aussi $\partial_1 f(x_0,y_0)$ et $\partial_2 f(x_0,y_0)$.
Le vecteur *gradient* de $f$ en $(x_0,y_0)$ est $\nabla f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$.

Dans la pratique, il y a deux types de questions :

- Si la fonction est suffisamment régulière au voisinage de $(x_0,y_0)$ (de classe $\mathcal{C}^1$, comme nous le verrons plus loin), obtenir $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ se fait par calcul de dérivées.
- Dans des situations plus particulières (par exemple au point de raccord d'une fonction définie par morceaux), on recherche $D_{e_1} f(x_0,y_0)$ et $D_{e_2} f(x_0,y_0)$, limites de taux d'accroissement.

Exercice 3 : Donner le gradient de $f : (x,y) \mapsto e^{x-y} + 2x^2y^3$ en $(-1,1)$.

**Définition - propriété 1**

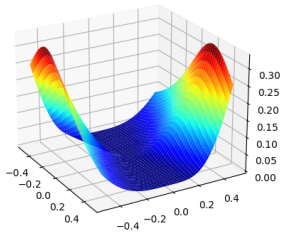
- $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$ si $f$ admet des dérivées partielles sur $U$ et que celles-ci sont continues sur $U$.
- Les fonctions polynomiales de deux variables sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
- On a les propriétés usuelles de classe $\mathcal{C}^1$, et de calcul des dérivées partielles, pour $\lambda f + \mu g$, $f \times g$, $\frac{f}{g}$, $\varphi \circ f$ avec $\varphi$ fonction de $f(U)$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (oral CCINP 2025) : On pose

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ f(x,y) = \frac{y^4}{\sqrt{x^2+y^2-xy}} \quad \text{et } f(0,0) = 0$$

1. (a) Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2+y^2-xy \geqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.
   (b) Montrer que $f$ est bien définie sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Justifier l'existence des dérivées partielles en $(x,y) \neq (0,0)$ et en donner la valeur.

3. Justifier l'existence des dérivées partielles en $(0,0)$ et en donner la valeur.
4. $f$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ en $(0,0)$ ?



**Propriété 1 – interprétation géométrique du gradient**

S'il n'est pas nul, le gradient de $f$ en $a = (x_0, y_0)$ est :

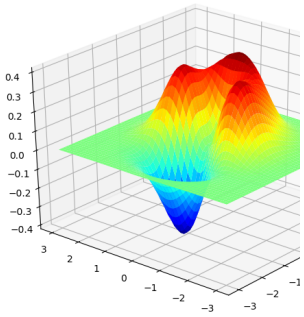
— de direction orthogonale à la courbe de niveau de $f$ passant par $a$

— de sens orienté vers les courbes de niveaux supérieurs

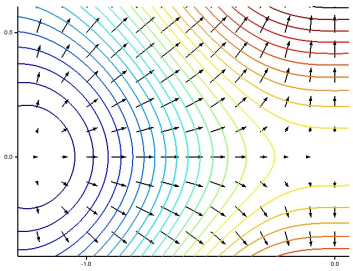
— de norme d'autant plus forte que les courbes de niveaux sont resserrées près de $a$.

De plus, il donne la direction « de plus forte pente » en $a$ : $\nabla f(a)$ est positivement colinéaire au vecteur unitaire $u$ selon lequel la dérivée directionnelle $\mathrm{D}_u f(a)$ de $f$ en $a$ est maximale.

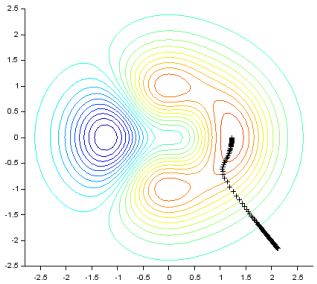
Surface



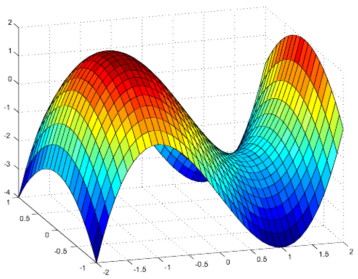
courbes de niveaux avec gradients

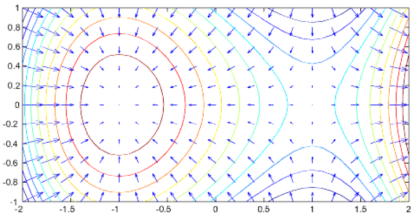


algorithme du gradient (H.P.)



Autre exemple :





Cadre de travail jusqu'à la fin du chapitre
$E$ et $F$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie, $\mathcal{U}$ est un ouvert de $E$.
Comme $\mathcal{U}$ est ouvert, pour tout $a \in \mathcal{U}$, pour $h \in E$ « suffisamment petit », $a+h$ appartient à $\mathcal{U}$.
$E$ étant de dimension finie, $E$ peut être muni d'une base $(e_1, \dots, e_n)$.
$F$ étant de dimension finie, $F$ peut être muni d'une base $(e'_1, \dots, e'_p)$.
On considère $f : \mathcal{U} \subset E \to F$. Pour $x \in \mathcal{U}$,

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad \text{et} \qquad f(x) = f(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) \underset{\text{identification}}{=} f(x_1, \dots, x_n)$$

Cette identification ne nous étonne d'ailleurs pas quand $E = \mathbb{R}^n$, ce qui sera souvent notre cadre de travail. Ceci explique que l'on parle de *fonctions de plusieurs variables*. Quand on veut donner un rôle particulier à chacune des variables, nous considérons les *applications partielles* :

$$x_i \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n) \text{ pour } x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \text{ fixés}$$

Pour $x \in \mathcal{U}$,

$$f(x) = f_1(x)e'_1 + f_2(x)e'_2 + \cdots + f_p(x)e'_p$$

Les fonctions $f_j : x \mapsto f_j(x)$ sont les *fonctions composantes*, à valeurs réelles.

Exercice 5 : Donner les applications partielles et les fonctions composantes (ou coordonnées) de $f$, où

$$f(x, y, z) = \left( \frac{1}{x^2 + y^2 + z^4}, e^x y \cos(z) \right)$$

# 2 Différentiabilité

## 2.1 dérivée selon un vecteur

**Définition 3**

Soit $a \in \mathcal{U}$ et $v \in E$. Sous réserve d'existence, la *dérivée de $f$ en $a$ selon le vecteur $v$*, notée $\mathrm{D}_v f(a)$, est la dérivée en 0 de la fonction d'une variable $t \mapsto f(a+tv)$.

$$\mathrm{D}_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

Exercice 6 : Calculer $\mathrm{D}_V f(A)$ pour $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto M^2$.

**Définition 4 – dérivées partielles relatives à une base**

Pour $(e_1, \dots, e_n)$ base de $E$ et $i \in [\![1, n]\!]$, la $i$-ième dérivée partielle de $f$ en $a$ est la dérivée de $f$ en $a$ selon le vecteur $e_i$. On note :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \partial_i f(a) = \mathrm{D}_{e_i} f(a)$$

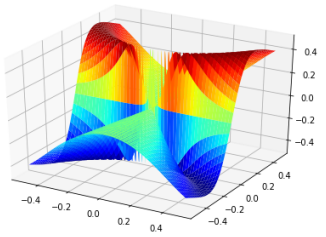
Remarques :

- Dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, on note plutôt $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ les dérivées partielles.
- Si $E = \mathbb{R}^n$ et qu'on ne précise pas la base dans laquelle on considère les dérivées partielles, c'est qu'on considère implicitement la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
- Dans la pratique, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ est la dérivée en $a_i$ de la $i$-ième application partielle. Sur un ouvert, il suffit de dériver chaque composante de la fonction avec $x_i$ variable, les autres variables étant fixées. En un point, on revient aux dérivées directionnelles selon les vecteurs de base.

Exercice 7 :

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2} \text{ si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \qquad \text{et} \qquad f(0,0) = 0$$

1. Montrer que $f$ admet des dérivées directionnelles en $(0,0)$ suivant tout vecteur $v = (v_1, v_2)$ et calculer $\mathrm{D}_v f(0,0)$.
2. Donner en particulier ses deux dérivées partielles en $(0,0)$.
3. En considérant $f(x, x^2)$, montrer que $f$ n'est pas continue en $(0,0)$.



Ainsi, l'existence de dérivées en $a$ selon tout vecteur n'est pas une bonne condition de régularité en $a$ de la fonction. C'est pourquoi nous introduisons la notion de différentiabilité.

## 2.2 différentielle en un point

**Définition - propriété 2**

On dit que $f$ est *différentiable* en $a$, ou que $f$ *admet un développement limité* à l'ordre 1 en $a$, s'il existe une application linéaire $L : E \to F$ telle que :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + L(h) + o(\|h\|)$$

Dans ce cas, une telle application $L$ est unique. On l'appelle *différentielle* de $f$ en $a$ et on la note $\mathrm{d}f(a)$.

Exercice 8 : Dans le cas où $E$ est un espace euclidien, montrer que $f : x \mapsto \|x\|^2$ est différentiable en tout point de $E$, et calculer la différentielle en $x$.

— La différentielle de $f$ en $a$ s'appelle aussi *application linéaire tangente* de $f$ en $a$.

— Lorsque $f = (f_1, \dots, f_p)$, $f$ est différentiable en $a$ si, et seulement si, toutes les fonctions composantes $f_j$ le sont.

Si $f$ est différentiable en $a$, alors $f$ est continue en $a$ et $f$ admet une dérivée selon tout vecteur en $a$ :

$$\mathrm{D}_v f(a) = \mathrm{d}f(a)(v)$$

et en particulier, si $f$ est différentiable en $a$, alors $f$ admet des dérivées partielles en $a$ dans toute base de $E$, et

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \mathrm{D}_{e_i} f(a) = \mathrm{d}f(a)(e_i)$$

$$\forall h = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i \in E, \quad \mathrm{d}f(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

**Notation**



La valeur en un vecteur $h$ de $E$ de l'application linéaire différentielle de $f$ en $a$ est souvent notée avec un point à la place d'une expression parenthésée.

$$\mathrm{d}f(a)(h) \underset{\text{notation}}{=} \mathrm{d}f(a)\cdot h$$

Je ne fais pas ce choix dans ce polycopié, mais sachez vous adapter.

**Cas particuliers**

- Si $f$ est constante, alors $\forall a \in \mathcal{U}$, $\mathrm{d}f(a) = 0_{\mathscr{L}(E,F)}$.
- Si $f$ est la restriction à $\mathcal{U}$ d'une application linéaire, alors $\forall a \in \mathcal{U}$, $\mathrm{d}f(a) = f$.
- Si $f$ est une fonction de la variable réelle, $f$ est différentiable en $a$ si, et seulement si, $f$ est dérivable en $a$. Dans ce cas,

$$\mathrm{d}f(a)(h) = f'(a)h \quad \text{et par linéarité de } \mathrm{d}f(a),\ f'(a) = \mathrm{d}f(a)(1)$$

**Définition 5 – différentiabilité – classe $\mathcal{C}^1$**

- On dit que $f$ est différentiable sur $\mathcal{U}$ si $f$ est différentiable en tout point $a$ de $\mathcal{U}$. On définit dans ce cas l'application différentielle, notée $\mathrm{d}f$, qui à $a$ associe $\mathrm{d}f(a)$.
- On dit que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ si $f$ est différentiable sur $\mathcal{U}$ et si $\mathrm{d}f$ est continue sur $\mathcal{U}$.

**Théorème 1 – classe $\mathcal{C}^1$ (admis)**

$f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ si, et seulement si, ses dérivées partielles existent et sont continues sur $\mathcal{U}$.

**Méthode –montrer qu'une fonction est différentiable en $a$ et obtenir sa différentielle**

- Dans des exercices plus « algébriques », on réussit à « développer » $f(a+h)$ en $f(a)$ plus une partie linéaire en $h$ plus une partie négligeable devant $\|h\|$. La partie linéaire en $h$ est alors $\mathrm{d}f(a)$ (définition-propriété 2).
- Dans des exercices avec des fonctions réelles de variables réelles, pour étudier si une fonction $f$ est différentiable en $a$, on peut :
  - — voir directement que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ (condition suffisante non nécessaire ; cette façon de faire est souvent valable face à des fonctions usuelles),
  - — ou bien on commence par vérifier l'existence de dérivées partielles en $a$, puis on mène une analyse-synthèse.
    Dans l'analyse, si $f$ est différentiable en $a$, alors

$$\mathrm{d}f(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

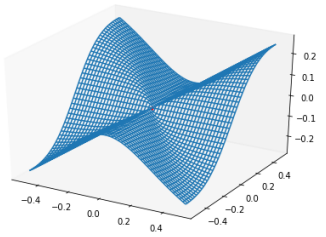
Dans la synthèse, on étudie si l'application linéaire $L : h \mapsto \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ satisfait

$$f(a+h) - f(a) - L(h) \underset{h\to 0}{=} o(\|h\|)$$

Exercice 9 :

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \qquad \text{et} \qquad f(0,0) = 0$$

1. Montrer que $f$ est différentiable en $(1,1)$ et calculer sa différentielle.
2. Montrer que $f$ admet des dérivées partielles en $(0,0)$ et les calculer.
3. Montrer que $f$ n'est pas différentiable en $(0,0)$.



**Définition 6**

On munit $E$ d'une base $\mathcal{B}$ et $F$ d'une base $\mathcal{B}'$. Soit $f$ une application différentiable en $a$, de composantes $f_1, \dots, f_p$. La matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans ces bases est la matrice de coefficients :

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{1 \leqslant i \leqslant p, 1 \leqslant j \leqslant n}$$

Lorsque $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$, on l'appelle *matrice jacobienne* de $f$ en $a$ et on la note $J_f(a)$.

Exercice 10 : Donner la matrice jacobienne en $(x,y,z)$ de $f : (x,y,z) \mapsto (e^x, xy^2z^3, xe^{yz}, z+2)$ (on ne demande pas de montrer que $f$ est différentiable, cela vient de sa classe $\mathcal{C}^1$).

## 2.3 Remarque pour la physique

Dans l'approche de Leibniz, la différentielle d'une fonction est son *accroissement infinitésimal*, qui s'écrit comme une combinaison des accroissements infinitésimaux des différentes variables. Ainsi pour une fonction $f$ des variables $x$ et $y$, l'accroissement infinitésimal $\mathrm{d}f$ s'exprime sous la forme :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\mathrm{d}y$$

Cette approche est toujours d'actualité en physique et en économie.



Leibniz, 1646-1716, mathématicien, physicien, philosophe allemand

### Cas d'une forme différentielle totale exacte (hors-programme de maths)

On munit $E$ d'une base $(e_1, \dots, e_n)$. Pour tout $i$ compris entre 1 et $n$, l'application $\sum_{k=1}^{n} x_k e_k \mapsto x_i$ est linéaire. Elle est donc égale à sa différentielle en tout point. C'est l'une des raisons pour laquelle elle est notée « $\mathrm{d}x_i$ ». Il s'ensuit quelques

« simplifications » :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(a)(h) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \mathrm{d}x_i(h) \\ \mathrm{d}f(a) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \mathrm{d}x_i \\ \mathrm{d}f &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i \end{aligned}$$

Et c'est ainsi que vous verrez par exemple, à partir de $PV = nRT$, $\frac{\mathrm{d}P}{P} + \frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{\mathrm{d}T}{T}$.

### 2.4 gradient (cas où $E$ est euclidien et $F = \mathbb{R}$)

Ici $E$ est un espace euclidien, et $f : \mathcal{U} \subset E \to \mathbb{R}$.

**Propriété 2**

Si $f$ est différentiable en $a \in \mathcal{U}$, on appelle *gradient* de $f$ en $a$, et on note $\nabla f(a)$, l'unique vecteur $v$ de $E$ qui vérifie :

$$\forall h \in E,\ \mathrm{d}f(a)(h) = \langle v | h \rangle$$

Ainsi

$$\forall h \in E,\ \mathrm{d}f(a)(h) = \langle \nabla f(a) | h \rangle$$

**Propriété 3**

Dans une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de $E$, on a :

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i$$

## 3 Opérations sur les applications différentiables

Les différentiabilités suivantes peuvent être énoncées en $a$. Je vous laisse adapter. Tous les résultats peuvent s'énoncer pour la classe $\mathcal{C}^1$. Je vous laisse adapter là encore.

**Propriété 4**

Si $f$ et $g$ sont différentiables sur $\mathcal{U}$, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est différentiable sur $\mathcal{U}$ et

$$\mathrm{d}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathrm{d}f + \mu \mathrm{d}g$$

**Propriété 5 – multilinéarité**

Tous les espaces vectoriels en jeu sont de dimension finie.

- Si $f$ et $g$ sont différentiables et $B$ est une application bilinéaire, alors $B(f,g)$ est différentiable et

$$\begin{aligned} \mathrm{d}[B(f,g)] &= B(\mathrm{d}f,g)+B(f,\mathrm{d}g) \\ \mathrm{d}[B(f,g)](a)(h) &= B(\mathrm{d}f(a)(h),g(a))+B(f(a),\mathrm{d}g(a)(h)) \end{aligned}$$

- Plus généralement, si $f_1,\dots,f_r$ sont différentiables et que $M$ est une application multilinéaire, alors $M(f_1,\dots,f_r)$ est différentiable et

$$\begin{aligned} \mathrm{d}[M(f_1,\dots,f_r)] &= M(\mathrm{d}f_1,f_2,\dots,f_r)+M(f_1,\mathrm{d}f_2,\dots,f_r)+\cdots+M(f_1,\dots,f_{r-1},\mathrm{d}f_r) \\ \mathrm{d}[M(f_1,\dots,f_r)](a)(h) &= M(\mathrm{d}f_1(a)(h),f_2(a),\dots,f_r(a))+\cdots+M(f_1(a),\dots,f_{r-1}(a),\mathrm{d}f_r(a)(h)) \end{aligned}$$

Pour $f$ et $g$ différentiables à valeurs dans une algèbre ($\mathbb{R}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$...), $fg$ est différentiable et

$$\mathrm{d}(fg)=(\mathrm{d}f)g+f(\mathrm{d}g)$$

Exercice 11 : Pour $f$ et $g$ endomorphismes d'un espace euclidien, on définit $\Psi(x)=\langle f(x),g(x)\rangle$. Calculer $\mathrm{d}\Psi(a)(h)$ pour $h\in E$ de deux façons (*aide des 5/2*).

**Propriété 6 – règle de la chaîne**

Soient $f:\mathcal{U}\to F$ et $g:\mathcal{V}\to G$ telles que $f(\mathcal{U})\subset\mathcal{V}$. Si $f$ est différentiable en $a\in\mathcal{U}$ et $g$ est différentiable en $f(a)$, alors $g\circ f$ est différentiable en $a$ et

$$\mathrm{d}(g\circ f)(a)=\mathrm{d}g(f(a))\circ\mathrm{d}f(a)$$

Au niveau des matrices jacobiennes, nous avons simplement

$$J_{g\circ f}(a)=J_g(f(a))\times J_f(a)$$

Exercice 12 : En effectuant le produit des matrices jacobiennes ci-dessus, qu'obtient-on comme formule en termes de dérivées partielles ?

En particulier, si $h(u_1,\dots,u_n)=g(f_1(u_1,\dots,u_n),\dots,f_p(u_1,\dots,u_n))$, on a accès aux dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial u_i}$ par la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial h}{\partial u_i}(u_1,\dots,u_n)=\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial f_k}{\partial u_i}(u_1,\dots,u_n)\frac{\partial g}{\partial x_k}(f_1(u_1,\dots,u_n),\dots,f_p(u_1,\dots,u_n))$$

**Propriété 7 – règle de la chaîne pour la dérivation le long d'un arc**

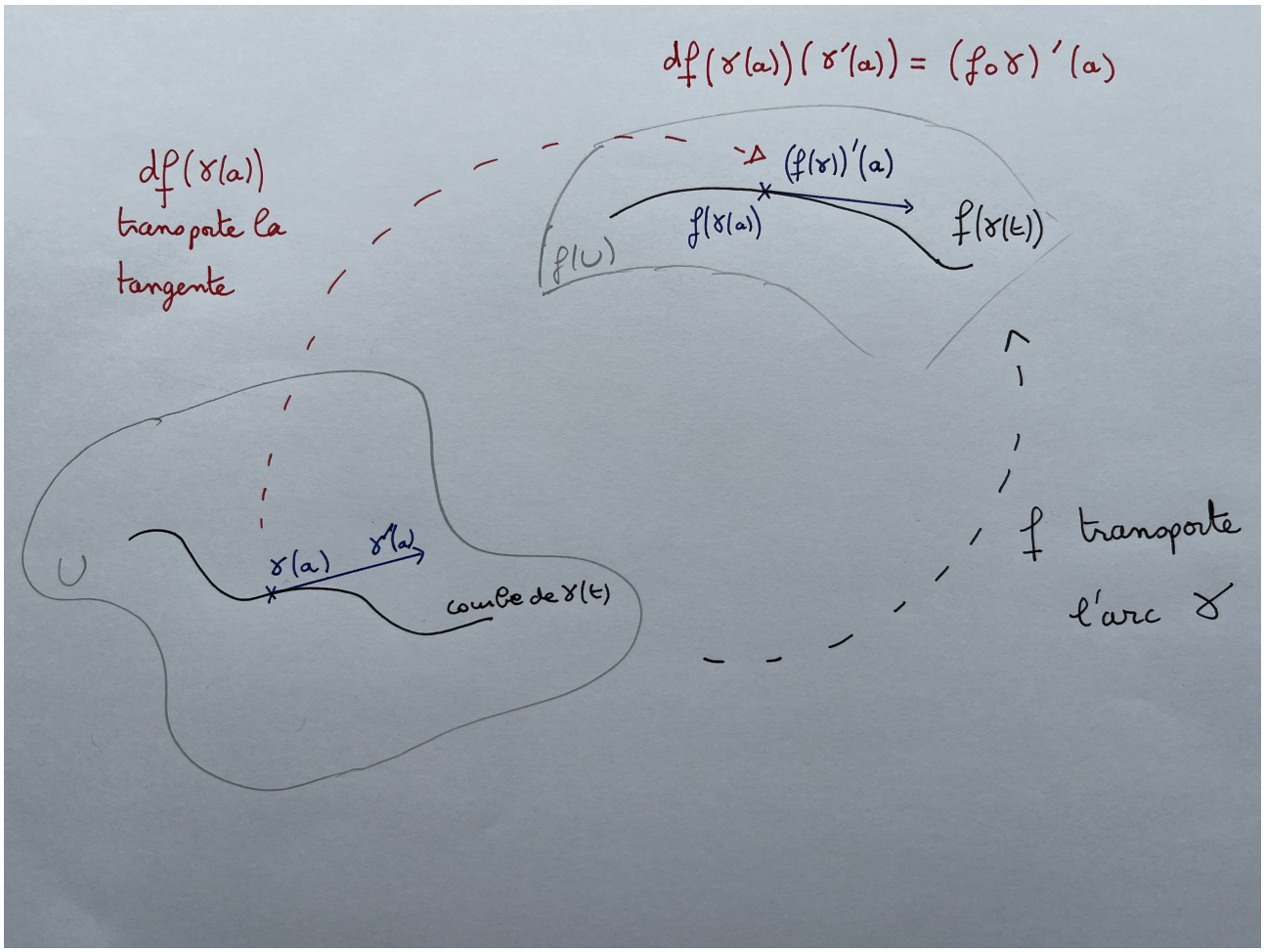
On rappelle que le nom *arc* est donné à toute application $\gamma$ d'un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ dans un espace vectoriel $E$. Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{U}$ et $t \in I$.

- Si $\gamma$ est dérivable en $t$ et $f$ est différentiable en $\gamma(t)$, alors $f \circ \gamma$ est dérivable en $t$ et

$$(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t))(\gamma'(t))$$

- Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ et on a plus simplement :

$$(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))$$




Exercice 13 : Calculer $g'(t)$, où $g(t) = f(t, t^2, t^3 - t^4, e^{-t})$.

Exercice 14 :

1. Calculer $g'(t)$ où $g(t) = f(4t + 1, -3t + 1)$ et calculer $h'(x)$ où $h(x) = f(x, x)$.
2. Calculer $\partial_1(H)(u, v)$ et $\partial_2(H)(u, v)$ pour $H(u, v) = f(u + v, u^2 + v^2)$ puis $H(u, v) = f(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$.

# 4 Applications de classe $\mathcal{C}^k$

## 4.1 la classe $\mathcal{C}^1$

Les opérations algébriques usuelles sont valables : combinaison linéaire, produit lorsqu'il s'agit de fonctions réelles, et composées lorsqu'il s'agit de fonctions réelles. Les fonctions polynomiales sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. On peut rédiger la classe $\mathcal{C}^1$ de $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ à l'aide de fonctions polynomiales suivies de fonctions usuelles.

Par exemple, la fonction $f : (x, y, z) \mapsto e^x \ln(y^2 + z^2 + 1)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.
$(x, y, z) \mapsto x$ est $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^3$ (ATTENTION !) dans $\mathbb{R}$ et exp est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc $(x, y, z) \mapsto e^x$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.
$(x, y, z) \mapsto y^2 + z^2 + 1$ est $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ et ln est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, donc $(x, y, z) \mapsto \ln(y^2 + z^2 + 1)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.

**Méthode – montrer qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^1$**

Pour démontrer que $f : \mathcal{U} \to F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ :

- on cherche d'abord à utiliser les théorèmes généraux de manipulation des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$,
- si ceux-ci ne s'appliquent pas (ou pas sur $\mathcal{U}$ entier), on peut chercher à montrer que les dérivées partielles de $f$ sont définies et continues sur $\mathcal{U}$.

Exercice 15 :

$$f(x, y) = \frac{x^4 + y^4 + z^4}{x^2 + y^2 + z^2} \text{ si } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \qquad \text{et} \qquad f(0, 0, 0) = 0$$

1. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.
2. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.

**Propriété 8 – intégration le long d'un arc**

Soit $f : \mathcal{U} \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $\gamma : [0, 1] \to \mathcal{U}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 (f \circ \gamma)'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t))(\gamma'(t))\,\mathrm{d}t$$

**Propriété 9**

Soit $\mathcal{U}$ un « ouvert connexe par arcs ».
La fonction $f$ est constante sur $\mathcal{U}$ si, et seulement si, $f$ est différentiable et $\mathrm{d}f = 0$.

## 4.2 les classes $\mathcal{C}^k$

On peut définir des dérivées partielles de dérivées partielles. Lorsqu'elle existe, la fonction $\partial_{j_k}(\partial_{j_{k-1}}(\dots(\partial_{j_1} f)))$ est la dérivée partielle selon les indices $(j_1, \dots, j_k)$, et on la note $\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_1}}$. Quand on dérive $f$ $k$ fois, on parle de dérivées partielles d'ordre $k$. Une application est de classe $\mathcal{C}^k$ si toutes ses dérivées partielles

d'ordre $k$ existent et sont continues sur $\mathcal{U}$.
On a les opérations algébriques habituelles sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ : combinaison linéaire, composition, les fonctions polynomiales sont de classe $\mathcal{C}^k$.
Lorsque $f$ est à valeurs réelles, ses dérivées partielles d'ordre 2 sont stockées dans la matrice hessienne :

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}$$

**Théorème 2 – Théorème de Schwarz (admis)**

Soit $f$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$, les matrices hessiennes de $f$ sont des matrices symétriques.

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

**Théorème 3 – Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 (admis)**

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \mathcal{U}$. On a

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \mathrm{d}f(a)(h) + \frac{1}{2} h^\top H_f(a) h + o(\|h\|^2)$$

soit aussi

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \langle \nabla f(a) | h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(a) h | h \rangle + o(\|h\|^2)$$

Nous utiliserons cette propriété dans le chapitre Optimisation.

# 5 Quelques exemples d'équations aux dérivées partielles

- Une fonction d'une variable admet une seule dérivée. On la note $f'$ en général. Si on choisit de noter $x$ la variable de la fonction, on peut noter $f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. Une fois ce choix effectué, il n'est plus possible de changer. On ne peut plus faire intervenir $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, par exemple.
- Une fonction de deux variables admet seulement deux dérivées partielles : $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$. En général, on choisit de considérer $f$ comme fonction des variables $x$ et $y$, et on peut alors considérer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

$I$ et $J$ désignent des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et $U = I \times J$ ; les fonctions considérées sont toutes de classe $\mathcal{C}^1$ pour des équations à l'ordre 1 et de classe $\mathcal{C}^2$ pour des équations à l'ordre 2.

- La solution générale sur $U$ de l'équation $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ est $f(x,y) = C(y)$.
- La solution générale sur $U$ de l'équation $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0$ est $f(x,y) = xC(y) + D(y)$.
- La solution générale sur $U$ de l'équation $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$ est $f(x,y) = C(x) + D(y)$.

Exercice 16 : Résoudre $(E)$ : $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x - y$.

Exercice 17 : Chercher les solutions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ qui vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$(E) : \ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

en effectuant le changement de variables $\begin{cases} x &= u \\ y &= \frac{w}{u} \end{cases}$.

Exercice 18 : Résoudre $(E)$ : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = 0$ (équation des cordes) sur $\mathbb{R}^2$, où $c \neq 0$, en posant $\begin{cases} u &= x - ct \\ v &= x + ct \end{cases}$.

# 6 Tangence et orthogonalité

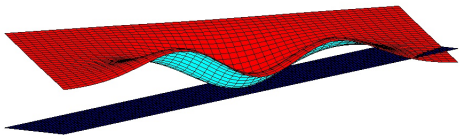
## 6.1 exemple pour une fonction de 2 variables

**Définition 7**

Dans l'espace usuel $\mathbb{R}^3$, l'ensemble d'équation

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0)$$

est un plan affine ; il s'agit du **plan tangent à la surface de $f$ en** $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$.



Exercice 19 : Soit $f(x,y) = \ln(2x+y)$. Donner le gradient en $a = (-1,3)$ et l'équation du plan tangent à la surface en $a$.

## 6.2 ensemble des vecteurs tangents à une partie en un point

**Définition 8**

Soit $X$ une partie de $E$ et $x$ un point de $X$.
Les vecteurs tangents à $X$ en $x$ sont les dérivées en 0 des arcs tracés sur $X$, définis au voisinage de 0, passant par $x$ en 0 et dérivables en 0.
Présenté autrement : un vecteur $v$ de $E$ est tangent à $X$ en $x$ s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc $\gamma$ défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$, à valeurs dans $X$, dérivable en 0, tel que $\gamma(0) = x, \gamma'(0) = v$.
On note $T_xX$ l'ensemble des vecteurs tangents à $X$ en $x$.

**Il ne faut pas croire que $T_xX$ est un espace vectoriel, mais quand ça l'est, on parle d'espace tangent.**

Remarques :

- Le vecteur nul est tangent à $X$ en tous les points de $X$.

  Soit $x \in X$. On prend $\gamma : t \mapsto$

  On a $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = 0$.

- Si $x \in \mathring{X}$, tout vecteur de $E$ est tangent à $X$ en $x$.

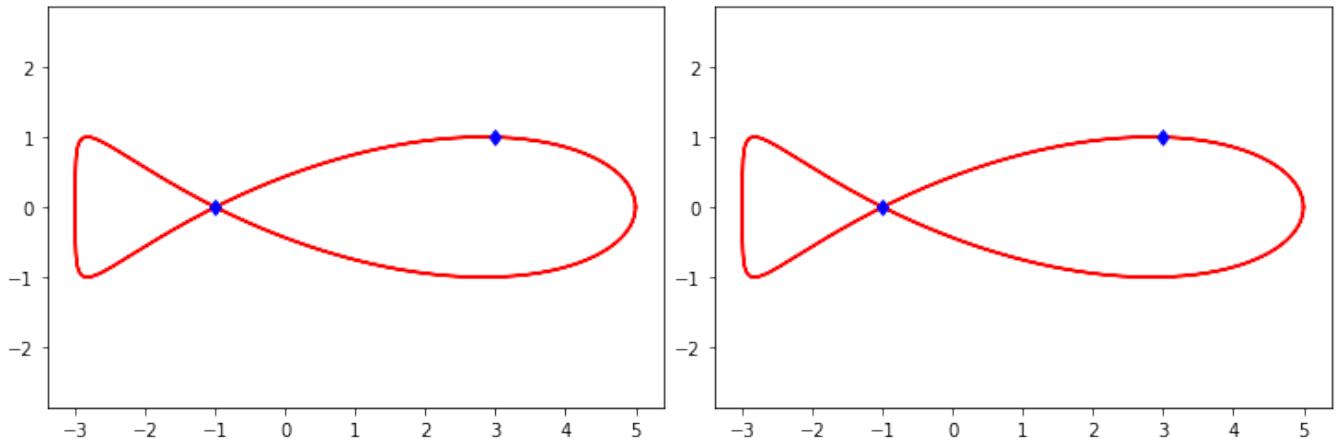
  Soit $x \in \mathring{X}$ et soit $v \in E$. Pour $t$ assez petit, $x + tv \in X$. On prend $\gamma : t \mapsto$

  On a $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.

  Illustration.

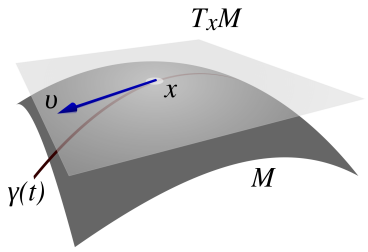
Exercice 20 : On considère $X$ égal au tracé du poisson ci-dessous (source : mathcurve.com).

1. Sans démonstration, représenter graphiquement $T_aX$, où $a = (3, 1)$.
2. Sans démonstration, représenter graphiquement $T_bX$, où $b = (-1, 0)$. On constate que $T_bX$ n'est pas un espace vectoriel.



## 6.3 Exemples d'ensembles $T_xX$

Exercice 21 (au programme) : **Exemple des vecteurs tangents à une sphère**




$E$ est un espace euclidien et $S$ est la sphère de centre 0 et de rayon $r > 0$. On va montrer par double-inclusion que pour $a \in S$,

$$T_aS = \{a\}^\perp = (\text{Vect}(a))^\perp$$

1. Résultat préliminaire, qu'on peut passer en première lecture. Montrer que si $v \in T_xX$, alors pour tout $\lambda$ réel, $\lambda v \in T_xX$.
2. Montrer que $T_aS \subset (\text{Vect}(a))^\perp$.
3. Réciproquement, soit $v \neq 0$ tel que $\langle a, v\rangle = 0$. En considérant

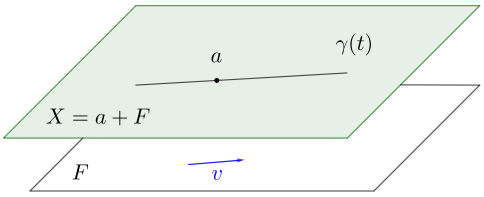
$$\gamma : \left( \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & E \\ t & \mapsto & \cos(t)a + r\sin(t)\frac{v}{\|v\|} \end{array} \right)$$

Montrer que $\frac{r}{\|v\|}v \in T_aS$. En utilisant le préliminaire, on a $v \in T_aS$.

Exercice 22 (au programme) : **Exemple des vecteurs tangents à un sous-espace affine** *(exercice difficile ; tête de classe)*

On considère le sous-espace affine $X = a + F$, avec $a \in E$ et $F$ sous-espace vectoriel de $E$. On va montrer par double-inclusion que pour $x \in X$, $T_xX = F$.

1. Montrer que $F \subset T_xX$.
2. (avec aide) Montrer que $T_xX \subset F$.

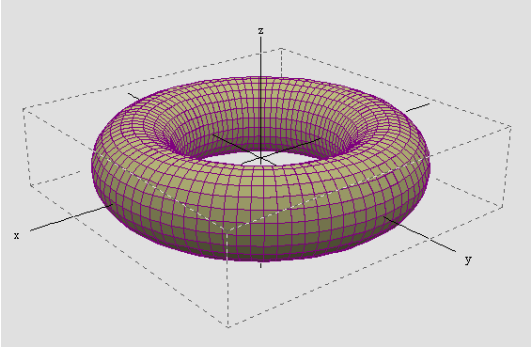


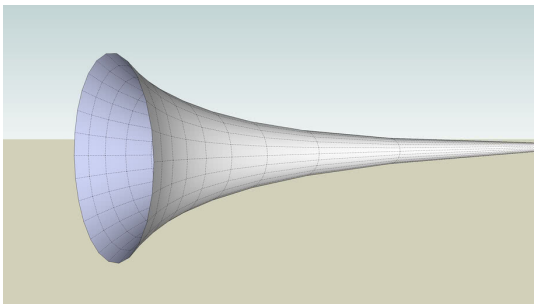
### 6.4 le cas des ensembles $X$ définis par une équation implicite

La description d'une surface de $\mathbb{R}^3$ par une équation de la forme $z = f(x, y)$ ne permet de décrire qu'un nombre restreint de surfaces de l'espace. Allez faire un tour sur le site `mathcurve.com`, rubrique surfaces, pour vous en convaincre !
On définit plus généralement une surface de $\mathbb{R}^3$ par la donnée d'une équation implicite $g(x, y, z) = 0$. Il n'est pas toujours possible d'exprimer $z$ en fonction de $x$ et $y$ pour se ramener au cas de la propriété 10 (en annexe). À titre d'exemple, vous avez ci-dessous un tore « chambre à air » d'équation

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$$

et la trompette de Gabriel, d'équation $(x^2 + y^2)z^2 = a^4$.



Le théorème suivant permet de contourner cette difficulté pour déterminer les espaces tangents pour de telles surfaces. Sa démonstration (en partie hors-programme) fait appel au théorème des fonctions implicites, précisant les conditions pour exprimer localement $z$ comme une fonction de $x$ et $y$.

**Théorème 4 – (admis)**

Soit $g : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $X = \{x \in \mathcal{U} \mid g(x) = 0\}$. Pour $a \in X$ tel que $\mathrm{d}g(a) \neq 0$, on a

$$T_a X = \ker \mathrm{d}g(a) = (\nabla g(a))^{\perp}$$

# 7 Annexe : quelques éléments de démonstrations

### Propriété 1 - Interprétation géométrique du gradient

On suppose que $\nabla f(a) \neq 0$.
Soit $u$ un vecteur de norme 1 et $g : t \mapsto f(a+tu)$. Par la règle de la chaîne, $g'(t) = \langle \nabla f(a+tu)|u\rangle$ et $g'(0) = \langle \nabla f(a)|u\rangle$. Par le théorème de Cauchy-Schwarz, $\mathrm{D}_u f(a) = g'(0) \leqslant \|f(a)\|$.

- En prenant $u = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$, on a $\mathrm{D}_u f(a) = \|f(a)\|$. Donc la direction $\nabla f(a)$ est une direction de plus forte pente en $a$.
- Et réciproquement, si $u$ est de norme 1 et réalise le maximum des $\mathrm{D}_u f(a)$, alors par le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $u$ et $\nabla f(a))$ sont colinéaires : il existe $\alpha$ réel tel que $\nabla f(a) = \alpha u$. $\mathrm{D}_u f(a) = \alpha$. Le cas où $\nabla f(a)$ est positivement colinéaire à $u$ conduit à une dérivée plus grande (positive) que le cas où $\nabla f(a)$ est négativement colinéaire à $u$ (dérivée négative).

Selon le temps disponible, on pourra dire deux mots de l'algorithme du gradient (voire le vidéoprojeter).

### Définition-propriété 2

Soient $L_1$ et $L_2$ des applications linéaires telles qu'au voisinage de 0, on ait :

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + L_1(h) + o(\|h\|) \\ f(a+h) &= f(a) + L_2(h) + o(\|h\|) \end{aligned}$$

Alors $L_1(h) = L_2(h) + o(\|h\|) = L_2(h) + \|h\|\varepsilon(h)$.
Soit $u \in E$. Pour $t$ réel suffisamment proche de 0, $t > 0$, on a (en prenant $h = tu$), $L_1(tu) = L_2(tu) + t\|u\|\varepsilon(tu)$, puis $L_1(u) = L_2(u) + \|u\|\varepsilon(tu)$. On fait tendre $t$ vers 0, on trouve $L_1(u) = L_2(u)$.

### Propriété 2

Au chapitre Endomorphismes d'un espace euclidien, figure le théorème de Riesz suivant.

**Théorème 5 – représentation des formes linéaires**

Pour toute forme linéaire $\varphi$, il existe un unique vecteur $w \in E$ tel que :

$$\forall x \in E,\ \varphi(x) = \langle w, x\rangle$$

Nous l'appliquons ici à la forme linéaire $\mathrm{d}f(a)$. Il existe un unique vecteur $w$ tel que $\mathrm{d}f(a)(h) = \langle w|h\rangle$.

### Propriété 7

Plaçons-nous uniquement dans le cas où $I$ est un intervalle ouvert. Par formule de différentiabilité pour une composée,

$$(f\circ\gamma)'(t) = \mathrm{d}(f\circ\gamma)(t)(1) = [\mathrm{d}f(\gamma(t))\circ \mathrm{d}\gamma(t)](1) = \mathrm{d}f(\gamma(t))(\mathrm{d}\gamma(t)(1)) = \mathrm{d}f(\gamma(t))(\gamma'(t))$$

### Propriété 8 et début de la propriété 9

Par la propriété 7, $(f\circ\gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t))(\gamma'(t))$ et il n'y a plus qu'à intéger de 0 à 1 cette fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

$$f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = \int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t))(\gamma'(t))\,\mathrm{d}t$$

Conformément au programme, on se place dans le cas où $\mathcal{U}$ est convexe. Appliquons l'égalité précédente à un arc paramétré qui est un segment, le segment $[a, a+h]$. Cela se fait avec $\gamma(t) = a + th$.

$$f(a+h) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f(a+th)(h)\,\mathrm{d}t$$

Si de plus, $\mathrm{d}f$ est nulle sur $\mathcal{U}$ et que $\mathcal{U}$ est convexe, alors on trouve $f(a+h) - f(a) = 0$ et $f$ est constante sur $\mathcal{U}$.
Comme énoncé en cours, on peut remplacer la convexité de $\mathcal{U}$ par sa connexité par arcs. Mais la démonstration de la propriété **??** est hors-programme en dehors du cas convexe.

### Exemple des vecteurs tangents à une sphère en page 17

1. Soit $v \in T_xX$. Il existe un arc $\gamma$ défini et dérivable sur un voisinage de 0 tel que $\gamma$ est à valeurs dans $X$, et $\begin{cases}\gamma(0) &= x\\ \gamma'(0) &= v\end{cases}$.

   On prend $c(t) = \gamma(\lambda t)$ sur un voisinage de 0. $c$ est à valeurs dans $X$ et $\begin{cases}c(0) &= x\\ c'(0) &= \lambda v\end{cases}$. Donc $\lambda v \in T_xX$.

   Si $v \in T_xX$, alors pour tout $\lambda$ réel, $\lambda v \in T_xX$.

2. Soit $v \in T_aS$ et $\gamma$ un arc associé, comme précédemment. Montrons que $\langle a, v\rangle = 0$.
   Comme $\gamma$ est à valeurs dans $S$, pour $t$ voisin de 0, on a $\langle \gamma(t), \gamma(t)\rangle = r^2$. On dérive (rencontré au paragraphe sur les applications bilinéaires) : $2\langle \gamma(t), \gamma'(t)\rangle = 0$. On évalue en 0 et on obtient $\langle a, v\rangle = 0$.
   $T_aS \subset (\text{Vect}(a))^\perp$.
3. Réciproquement, soit $v \neq 0$ tel que $\langle a, v\rangle = 0$. Considérons

$$\gamma : \left( \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & E \\ t & \mapsto & \cos(t)a + r\sin(t)\frac{v}{\|v\|} \end{array} \right)$$

   On a $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = \frac{r}{\|v\|}v$. Vérifions que $\gamma$ est à valeurs dans $S$. Comme $a$ et $v$ sont orthogonaux, on a $\|\gamma(t)\|^2 = \|\cos(t)a\|^2 + \|r\sin(t)\frac{v}{\|v\|}\|^2 = (\cos(t))^2 r^2 + r^2(\sin(t))^2 = r^2$.
   Finalement $\frac{r}{\|v\|}v \in T_aS$. En utilisant le préliminaire, on a $v \in T_aS$.

Attention ! Ne pas conclure trop vite intuitivement, bien réfléchir à la signification de $T_xX$. Par exemple, nous avons vu que si $x \in \mathring{X}$, alors $T_xX = E$. En particulier, si $\Omega$ est ouvert, $T_x\Omega = E$ pour tout $x$ de $\Omega$. Si l'on revient à notre exemple,

$$\forall x \in \mathcal{B}(0,1), \quad T_xB(0,1) = E$$

ce qui ne correspond peut-être pas à notre intuition géométrique sur la boule unité, mais se comprend bien lorsqu'on relit que $\gamma$ est à valeurs dans $X$...

### Exemple des vecteurs tangents à un sous-espace affine en page 17

Soit $x \in E$.

1. Soit $v \in F$. On considère l'arc $\gamma(t) = x + tv$.
   Comme $x \in a + F$, $x$ s'écrit $a + f$, et $\gamma(t) = a + (f + tv) \in a + F$. Donc $\gamma$ est bien à valeurs dans $X = a + F$, et on a $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$. Donc $v \in T_xX$.
   $F \subset T_xX$.
2. (avec aide pour la topologie) Réciproquement, soit $v \in T_xX$. Il existe $\gamma$ arc à valeurs dans $X$, défini au voisinage de 0 et dérivable en 0, tel que $v = \gamma'(0)$ et $x = \gamma(0)$.
   Pour tout $t$ au voisinage de 0, $\gamma(t) - \gamma(0) \in F$. Et comme $F$ est un espace vectoriel, $\frac{\gamma(t)-\gamma(0)}{t} \in F$.

$$v = \lim_{n\to+\infty} \frac{\gamma(1/n) - \gamma(0)}{1/n}$$

   Ainsi $v$ est limite d'une suite d'éléments de $F$. Or $F$ est fermé, en tant que sous-espace vectoriel de dimension finie, donc $v \in F$.
   $T_xX \subset F$.

### Propriété 10

**Propriété 10**

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction réelle de deux variables.
On note $S$ son graphe, $S = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3,\ (x, y) \in \mathcal{U}\}$.
L'ensemble $T_{M_0}S$ des vecteurs tangents à $S$ en $M_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est un plan vectoriel $P$.
Le plan affine $M_0 + P$ est appelé *plan tangent à la surface en* $(x_0, y_0)$ et a pour équation

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Démonstration dans le cadre où $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$.
Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction réelle de deux variables. On note $S$ la surface de $f$ : $S = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.
Montrons que l'ensemble $T_{M_0}S$ des vecteurs tangents à $S$ en $M_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est un plan vectoriel $P$. On pose

$$\vec{n} = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right)$$

Montrons pour commencer que $T_{M_0}S = (\vec{n})^\perp$.

• Soit $v$ un vecteur tangent à $S$ en $M_0$.
*Je note les arcs en colonne pour mieux visualiser.*

Il existe un arc $\gamma : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ f(x(t),y(t)) \end{pmatrix}$ dérivable en 0, à valeurs dans $S$ tel que $\gamma(0) = M_0$ et $\gamma'(0) = v$.

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t)) \end{pmatrix}$$

$$v = \gamma'(0) = \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \\ x'(0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + y'(0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

On a bien $\langle v, \vec{n}\rangle = 0$.

- Réciproquement, soit $v = (v_x, v_y, v_z)$ orthogonal à $\vec{n}$. On considère l'arc suivant :

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_0 + tv_x \\ y_0 + tv_y \\ f(x_0 + tv_x, y_0 + tv_y) \end{pmatrix}$$

On a $\gamma(0) = M_0$ et $\gamma'(0) = (v_x, v_y, v_x\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + v_y\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0))$.
Comme $v_xn_1 + v_yn_2 + v_zn_3 = \langle v, \vec{n}\rangle = 0$, on a $v_xn_1 + v_yn_2 = -v_zn_3 = v_z$ et $\gamma'(0) = v$.
Donc $v \in T_{M_0}S$.

L'équation cartésienne du plan de vecteur normal $(n_1, n_2, n_3)$ et passant par $(a, b, c)$ est $n_1(x-a)+n_2(y-b)+n_3(z-c) = 0$.
En remplaçant, on trouve bien que le plan de vecteur normal $\vec{n}$ et passant par $M_0$ a pour équation

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

**Théorème 4 (une inclusion)**
Soit $X = \{x \in \mathcal{U},\ g(x) = 0\}$ et $v \in T_a$. Soit $\gamma$ un arc dérivable à valeurs dans $X$ vérifiant $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$. Au voisinage de 0, on a :

$$g(\gamma(t)) = 0$$

On dérive :

$$\mathrm{d}g(\gamma(t))(\gamma'(t)) = 0 \text{ et on évalue en } 0 : \mathrm{d}g(a)(v) = 0$$

donc $v \in \ker \mathrm{d}g(a)$.

On admet l'inclusion réciproque, conformément au programme.

Enfin, dans un espace euclidien, on a vu que $\mathrm{d}g(a)(h) = \langle \nabla g(a) | h\rangle$.