

Intégrales généralisées

Les attentes



1. Savoir définir la convergence (= existence) d'une intégrale. Savoir définir l'intégrabilité d'une fonction.
2. Dans les rédactions, on commence toujours par présenter la continuité de l'intégrande.
3. Pour f continue, dérivation de $x \mapsto \int_x^{+\infty} f$.
4. Si f est intégrable sur I , alors $\int_I f(t) dt$ converge.
5. Intégrabilités de référence : intégrales de Riemann en $+\infty$, intégrales de Riemann en 0, intégrales de Riemann en un point, et intégrales exponentielles.
6. Théorèmes d'équivalence, comparaison, négligeabilité.
7. Rédaction particulière de l'intégration par parties.
8. Rédaction particulière du changement de variable.
9. Théorème de convergence dominée pour intervertir limite et intégrale.



10. Intégration des relations de comparaison (domination, négligeabilité et équivalence), pour les intégrales partielles ou les restes. La fonction de référence est de signe constant.

f est une fonction de la variable réelle et à valeurs dans $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Quand ce ne sera pas précisé, a désigne un réel ou $-\infty$, et b désigne un réel ou $+\infty$.

1 Quelques résultats de première année

En première année, il a été présenté l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, puis la généralisation à l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

Théorème 1 – théorème fondamental du calcul intégral

- Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive. En particulier, si f est continue sur un intervalle I et $a \in I$,

$$H : x \mapsto \int_a^x f(t) \, dt$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a . La fonction H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $H'(x) = f(x)$ pour $x \in I$.

- Si f est continue sur le segment $[a, b]$ alors $\int_a^b f(t) \, dt = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a, b]$.

Expression intégrale de f quand f est de classe $\mathcal{C}^1$ En particulier, pour f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $a \in I$,

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) \, dt$$

Définition 1

Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est *continue par morceaux* s'il existe une subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

- $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$ est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$
- $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$ est prolongeable par continuité en x_i et x_{i+1} .

La subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ est dite adaptée à f .

SCHÉMA

Par exemple, les fonctions continues et les fonctions en escalier sont continues par morceaux. Avec les notations précédentes, l'intégrale de f sur $[a, b]$ est la somme des intégrales $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f$, et est indépendante de la subdivision choisie.

Exercice 1 : Calculer $I = \int_{-\sqrt{3}}^2 t \lfloor t \rfloor \, dt$.

2 Convergence d'intégrales sur un intervalle semi-ouvert à droite

Il s'agit maintenant de donner un sens si possible à l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle autre qu'un segment. On parle alors d'*intégrales impropres* ou *généralisées*.

Définition 2

On dit que f est *continue par morceaux* sur l'intervalle I si sa restriction à tout segment inclus dans I est continue par morceaux. On note $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Notre premier objectif est d'étudier la *convergence*, c'est-à-dire l'existence, d'intégrales du type $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(t)} dt$ ou $\int_1^{+\infty} e^{-3t} dt$.

Soient a réel et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$.

Définition 3

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$.

L'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ est convergente si les *intégrales partielles* $\int_a^x f(t) dt$ admettent une limite finie quand x tend vers b . La valeur de l'intégrale est alors notée $\int_a^b f$, ou $\int_a^b f(t) dt$, ou $\int_{[a,b[} f$, et correspond à

$$\int_a^b f = \int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ diverge.

Définition 4

Dans le cas où l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge, on appelle *reste* la fonction R définie sur $[a, b[$ par :

$$R(x) = \int_x^b f(t) dt = \int_a^b f(t) dt - \int_a^x f(t) dt$$

On a $\lim_{x \rightarrow b} R(x) = 0$.



Converger a ici le sens d'exister. On dira « l'intégrale converge et vaut... » mais pas « l'intégrale converge vers... ».

- Deux intégrales sont *de même nature* si elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

- Si f est continue par morceaux sur $[a, b[$, alors pour tout $c \in [a, b[$, les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ sont de même nature. Autrement dit, seul le point à problème, b , importe !
- Le vocabulaire est très ressemblant à celui du chapitre Séries, mais attention tout de même :

$$\sum u_n \text{ converge} \Rightarrow \lim u_n = 0$$

$$\int_a^b f(t) dt \text{ converge} \not\Rightarrow \lim_b f = 0$$

- Dans le cas où f est continue par morceaux sur $[a, b]$, nous nous retrouvons avec deux définitions de $\int_a^b f(t) dt$: l'intégrale définie en première année, et l'intégrale qu'on vient de définir, limite des intégrales partielles. Heureusement, elles sont égales. La démonstration est en annexe.

Propriété 1 – intégrales de référence (1)

α est un réel.

Intégrales de Riemann en l'infini. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Intégrales de Riemann en $b_0 \in \mathbb{R}$. $\int_a^{b_0} \frac{1}{(b_0 - t)^\alpha} dt$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Intégrale exponentielle pour a réel, $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$ converge si, et seulement si, $a > 0$

Démonstration en classe.

Propriété 2 – lien avec une primitive

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ et F une primitive de f .

- L'intégrale $\int_a^b f$ converge si, et seulement si, F admet une limite finie en b .
- Si l'intégrale $\int_a^b f$ converge, la fonction $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ est dérivable sur $[a, b[$, de dérivée $-f$.

3 Convergence d'intégrales sur un intervalle semi-ouvert à gauche, sur un intervalle ouvert

Nous adaptons facilement la section précédente au cas d'une fonction continue par morceaux sur $]a, b]$ avec $-\infty \leq a < b$. Voyons en situation.

Exercice 2 :

1. Étudier la convergence de $\int_{-\infty}^0 \sin(t) dt$.

2. Montrer que $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge et calculer cette intégrale.

Propriété 3 – intégrales de référence (2)

Intégrales de Riemann en $a_0 \in \mathbb{R}$. $\int_{a_0}^b \frac{1}{(t-a_0)^\alpha} dt$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Par exemple, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ converge, et $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ diverge.

Définition 5

Ici $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Soit f une fonction continue par morceaux sur $]a, b[$. On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f$ converge

si, et seulement si, les intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent quel que soit $c \in]a, b[$.

Si c'est le cas, pour avoir la valeur de l'intégrale, il n'y a plus qu'à additionner :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

Exercice 3 : Étudier la convergence des intégrales suivantes et les calculer si elles convergent :

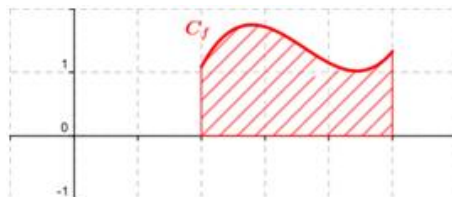
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^3 dt$$

Remarques :

— Les intégrales de Riemann sont toujours divergentes lorsqu'on les étudie sur $[0, +\infty[$. En effet,

— Si une fonction f est continue sur $I =]a, b[$ et est prolongeable en une fonction continue sur le segment $[a, b]$, alors l'intégrale de f sur I converge. Une telle intégrale est parfois appelée *faussement impropre*.

Par exemple, l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge. Pour bien comprendre, imaginez-vous bien le graphe de la fonction prolongeable par continuité sur un segment.



4 Propriétés des intégrales convergentes

Pour couvrir les différents cas de figure, on considère I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a = \inf I$, $b = \sup I$.

Propriété 4 – linéarité

Soient f et g des fonctions continues par morceaux sur I , d'intégrale convergente sur I , et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt$ converge, et on a :

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$$

Autrement dit, l'ensemble des fonctions dont l'intégrale sur I converge est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et l'application qui à une telle fonction associe son intégrale sur I est une forme linéaire.

Propriété 5 – fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$

Étant donné $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{C})$, l'intégrale $\int_a^b f$ converge si, et seulement si, les intégrales $\int_a^b \operatorname{Re}(f)$ et $\int_a^b \operatorname{Im}(f)$ convergent, et on a alors :

$$\int_a^b f = \int_a^b \operatorname{Re}(f) + i \int_a^b \operatorname{Im}(f)$$

Exercice 4 : Calculer, pour $\alpha > 0$, les intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \cos(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \sin(t) dt$.

Propriété 6 – positivité et stricte positivité de l'intégrale

Soit f continue par morceaux sur I telle que l'intégrale $\int_a^b f$ converge.

— Si f est positive sur I alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.

— Si $a < b$ et f est strictement positive sur I , alors $\int_a^b f(t) dt > 0$.

Propriété 7 – nullité de l'intégrale

Soit f une fonction **continue** sur I telle que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge.

Si f est continue, de signe constant sur I et $\int_a^b f(t) dt = 0$, alors : $\forall t \in I, f(t) = 0$.

Propriété 8 – croissance de l'intégrale

Soient deux fonctions f et g continues par morceaux sur I , d'intégrale convergente sur I .

Si $f \leq g$ sur I , alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.

Propriété 9 – relation de Chasles

Soit f continue par morceaux sur I telle que l'intégrale $\int_a^b f$ converge. Pour tout $c \in]a, b[$,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

5 Le cas particulier des intégrales de fonctions positives

Propriété 10

Soit f continue par morceaux sur $[a, b[$ et **positive**.

$\int_a^b f(t) dt$ converge $\Leftrightarrow$ la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée sur $[a, b[$

$\int_a^b f(t) dt$ diverge $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt = +\infty$

Dans le cas où f est POSITIVE, on peut choisir de se placer dans $[0, +\infty]$. Dans $[0, +\infty]$, l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ existe toujours :

- $\int_a^b f(t) dt = +\infty$ si, et seulement si, l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ diverge. Ce sera le cas quand f n'est pas intégrable sur $]a, b[$.
- $\int_a^b f(t) dt < +\infty$ si, et seulement si, l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge. Ce sera le cas quand f est intégrable sur $]a, b[$.

Par exemple, dans $[0, +\infty]$,

$$\int_0^1 \frac{1}{t} dt = +\infty \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = [2\sqrt{t}]_0^1 = 2$$

Théorème 2 – majoration

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle I telles que $0 \leq f \leq g$ sur I . Si l'intégrale de g sur I converge, alors l'intégrale de f sur I converge également.

Par contraposée de ce résultat, nous avons aussi : si $\int_a^b f$ diverge, alors $\int_a^b g$ diverge.

Exercice 5 : Étudier la nature des intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{e^t}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^3}\right) dt$.

6 Fonctions intégrables et espace $L^1(I, \mathbb{K})$

Définition 6

Soit f une fonction continue par morceaux sur I . On dit que f est *intégrable* sur I ou que l'intégrale de f sur I *converge absolument* si l'intégrale de $|f|$ sur I converge.

On note $L^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions intégrables sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Remarque : pour une fonction de signe constant, la convergence absolue (l'intégrabilité) équivaut à la convergence de l'intégrale.

Comme exemples élémentaires, nous avons :

- la fonction nulle est intégrable sur $\mathbb{R}$,
- la fonction constante égale à 1 n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

Propriété 11 – intégrales de référence (récapitulatif)

α, a, a_0, b_0 sont des réels avec $a > 0$ et $a_0 < b_0$.

Intégrales de Riemann en l'infini.

$x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Intégrales de Riemann en $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$.

$x \mapsto \frac{1}{|x - b_0|^\alpha}$ est intégrable sur $[a_0, b_0[$ si, et seulement si, $\alpha < 1$.

$x \mapsto \frac{1}{(x - a_0)^\alpha}$ est intégrable sur $]a_0, b_0]$ si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Intégrale exponentielle $x \mapsto e^{-ax}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si, et seulement si, $a > 0$.

Comme pour les séries, pour lesquelles la convergence absolue impliquait la convergence, nous avons le très utile résultat suivant.

Propriété 12 – inégalité triangulaire

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si f est intégrable sur I , alors l'intégrale de f sur I converge. De plus,

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

où $a = \inf I$ et $b = \sup I$.

La réciproque est fausse, il existe des fonctions dont l'intégrale sur I converge, mais ne converge pas absolument. C'est le cas par exemple de l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$. On dit dans ce cas que l'intégrale est *semi-convergente*.

Propriété 13

L'espace $L^1(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

7 Comment se ramener à une fonction de référence ?

Comme pour les séries, nous cherchons ici à nous ramener à des références pour établir la convergence, au moyen d'équivalences, dominations, négligeabilités.

Théorème 3 – domination-négligeabilité

Soient f et g des fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$.

- Si $f =_b O(g)$ et si g est intégrable sur $[a, b[$, alors f l'est aussi.
- En particulier, si $f =_b o(g)$ et si g est intégrable sur $[a, b[$, alors f l'est aussi.

Comme souvent dans ce chapitre, ce théorème et le suivant restent valables sur $]a, b]$. Nous utiliserons souvent la situation suivante, qui découle du théorème de négligeabilité ou de domination.

CRITÈRE DE RIEMANN



Si $f(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ ou $f(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ avec $\alpha > 1$, alors f est intégrable sur « $[a, +\infty[$ » où $a > 0$.

Si $f(t) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ ou $f(t) \underset{0}{=} O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ avec $\alpha < 1$, alors f est intégrable sur « $]0, a]$ ».

Théorème 4 – critère d'équivalence

Soient f et g des fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$ telles que $f \sim_b g$.
 f est intégrable sur $[a, b[$ si, et seulement si, g est intégrable sur $[a, b[$.

Exercice 6 : Montrer que l'intégrale $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{3/2}} dt$ converge.

Exercice 7 : Montrer que $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x^{3/2}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Exercice 8 (extraits d'oraux Mines-Télécom) :

1. (oral Mines-Télécom) Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} t^n}{\sqrt{t}} dt$. Montrer que u_n est bien défini.
2. Montrer que $f : t \mapsto \left(\frac{\arctan(t)}{t} \right)^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Discuter de l'intégrabilité de $f : t \mapsto \frac{t^r - 1}{t^2 \ln t}$ sur $]1, +\infty[$ en fonction du paramètre réel r .

Exercice 9 (extrait Mines-Ponts 2024) :

Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $f : t \mapsto \frac{1 - (\cos t)^{2p+1}}{t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

8 Calcul intégral

8.1 intégration par parties

Soient $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$. Par intégration par parties, on obtient :

$$\forall x \in [a, b], \quad \int_a^x f'(t)g(t) dt = [f(t)g(t)]_a^x - \int_a^x f(t)g'(t) dt$$

Ainsi, si $\lim_{x \rightarrow b} f(x)g(x)$ existe et est finie, alors les intégrales $\int_a^b f(t)g'(t) dt$ et $\int_a^b f'(t)g(t) dt$ sont de même nature.

Propriété 14

Soient $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si fg admet des limites finies en a et b , alors les intégrales $\int_a^b f(t)g'(t) dt$ et $\int_a^b f'(t)g(t) dt$ sont de même nature. Par intégration par parties :

$$\int_a^b f'(t)g(t) dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t) dt$$

où $[f(t)g(t)]_a^b$ désigne $\lim_b fg - \lim_a fg$.

 Exercice 10 : Pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est une intégrale convergente.
2. Établir une relation entre I_n et I_{n+1} .
3. En déduire la valeur de I_n .

8.2 changement de variable

Propriété 15 – Cas d’une intégrale d’une fonction continue sur un segment

Soient f une fonction continue sur I et $\varphi : [c, d] \rightarrow I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On a

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(u) du$$

Dans la pratique, on mène les calculs sans revenir à la forme précédente.

Propriété 16

a et α désignent un réel ou $-\infty$, b et β désignent un réel ou $+\infty$.

Soit f continue sur $]a, b[$. Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, strictement monotone, réalisant une bijection de $]\alpha, \beta[$ dans $]a, b[$.

Les intégrales $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ et $\int_a^b f(u)du$ sont de même nature. En cas de convergence :

- si φ est croissante, $\int_a^b f(u)du = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t) dt$
- si φ est décroissante, $\int_a^b f(u)du = - \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t) dt$.

Autrement dit, les intégrales avant et après changement de variables sont de même nature ; en cas de convergence, elles sont égales si φ est croissante, elles sont opposées si φ est décroissante.

Notez bien les différentes d’hypothèses à rédiger (quand on est sur un segment, on demande juste que le changement de variables soit de classe $\mathcal{C}^1$, tandis que sur un intervalle quelconque, le changement de variable doit être de classe $\mathcal{C}^1$, bijectif et strictement monotone).

RECETTE : Conformément au programme, on applique ce résultat sans justification dans des cas de changements de variable usuels. Pour ma part, j’exigerai toujours au minimum le tableau de variations correspondant au changement de variables, avec les limites aux bornes.

$$t = \varphi(u) \quad dt = \varphi'(u) du$$

u	bornes connues
$t = \varphi(u)$	on trouve les bornes de t

u	on trouve les bornes de u
$t = \varphi(u)$	bornes connues

Exercice 11 :

1. Effectuer le changement de variable $u = nt$ dans l’intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{n \cos t}{1 + n^2 t^2} dt$.

2. Effectuer le changement de variable $t = u^2$ dans l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt$.
3. Trigonométrie : si vous la connaissez, donner l'expression de $\cos t$ en fonction de $u = \tan \frac{t}{2}$ (et sinon, trouvez-la).
- Effectuer le changement de variable $u = \tan \frac{t}{2}$ dans l'intégrale $\int_0^\pi \frac{1}{2 + \cos t} dt$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$. Exprimer I_n à l'aide des intégrales de Wallis $W_k = \int_0^{\pi/2} \sin^k x dx$ en effectuant le changement de variable $t = \frac{\cos u}{\sin u} = \cotan u$.

9 Intégration des relations de comparaison

Propriété 17 – référence intégrable et reste

Soient f continue par morceaux sur $[a, b[$ et g **positive** et **intégrable** sur $[a, b[$.

- Si $f(x) \underset{b}{\sim} g(x)$ alors f est intégrable sur $[a, b[$ et $\int_x^b f(t) dt \underset{b}{\sim} \int_x^b g(t) dt$.
- Si $f(x) \underset{b}{=} o(g(x))$ alors f est intégrable sur $[a, b[$ et $\int_x^b f(t) dt \underset{b}{=} o\left(\int_x^b g(t) dt\right)$.
- Si $f(x) \underset{b}{=} O(g(x))$ alors f est intégrable sur $[a, b[$ et $\int_x^b f(t) dt \underset{b}{=} O\left(\int_x^b g(t) dt\right)$.

Propriété 18 – référence non intégrable et intégrales partielles

Soient f continue par morceaux sur $[a, b[$ et g **positive** et **non intégrable** sur $[a, b[$.

- Si $f(x) \underset{b}{\sim} g(x)$ alors f n'est pas intégrable sur $[a, b[$ et $\int_a^x f(t) dt \underset{b}{\sim} \int_a^x g(t) dt$.
- Si $f(x) \underset{b}{=} o(g(x))$ alors $\int_a^x f(t) dt \underset{b}{=} o\left(\int_a^x g(t) dt\right)$.
- Si $f(x) \underset{b}{=} O(g(x))$ alors $\int_a^x f(t) dt \underset{b}{=} O\left(\int_a^x g(t) dt\right)$.

Exercice 12 : Donner un équivalent quand $x \rightarrow +\infty$ de $\int_1^x \frac{dt}{t + \sqrt{t} + 1}$.

Exercice 13 : Montrer que $\int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt \underset{x \rightarrow 0^+}{=} O(\sqrt{x})$.

Exercice 14 (oral Mines-Ponts) :

Soit $x > 0$. On pose $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$.

1. Justifier que f est définie sur $]0, +\infty[$.
2. Donner un équivalent de $f(x)$ en 0 et en $+\infty$.

10 Approfondissement : l'intégrale Gamma d'Euler

Thème classique – Intégrales Gamma

Les intégrales $\Gamma(x)$ sont les intégrales données par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

On a les propriétés :

$$\Gamma(x) \quad \text{converge si, et seulement si,} \quad x > 0$$

Autrement dit, le domaine de définition de la fonction Γ est $]0, +\infty[$. On a la relation :

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Ces résultats ne sont pas à apprendre. Il s'agit néanmoins de grands classiques ! Vous pouvez les démontrer à titre d'exercice (corrigé en annexe).

11 Initiation aux problèmes d'interversion limite-intégrale

11.1 la notion de convergence simple

Question

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(x) dx \stackrel{?}{=} \int_I \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$$

Réponse Pas toujours ! C'est des objectifs de l'année de savoir répondre à ce genre de questions. Nous découvrons ici un premier théorème.

On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Définition 7 – convergence simple

On dit que la suite de fonctions (f_n) *converge simplement* vers la fonction f sur I si

$$\forall x \in I, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

Exercice 15 : Dans cet exercice, I est l'intervalle $[0, 1]$.

Pour chacune des suites de fonctions suivantes, montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f que l'on déterminera.

Calculer $\int_0^1 f_n(x) dx$ et dire si, oui ou non, on a égalité entre $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(x) dx$ et $\int_I \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$.

$$1. f_n(x) = x^n(1 - x)$$

$$2. f_n(x) = \begin{cases} ne^{-nx} & \text{si } x \in]0, 1] \\ 3 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

11.2 le théorème de convergence dominée

Théorème 5 – théorème de convergence dominée – admis

Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$. On fait les hypothèses suivantes :

- la suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux
- il existe une fonction φ intégrable sur I vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, \quad |f_n(t)| \leq \varphi(t)$$

Alors toutes les fonctions en jeu sont intégrables sur I et on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \int_I f(t) dt$$

Conformément au programme, pour l'application pratique du théorème de convergence dominée, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination mais pas les hypothèses de continuité par morceaux.

Exercice 16 : En utilisant le théorème de convergence dominée, déterminer la limite quand n tend vers l'infini des intégrales suivantes.

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$$

$$I_n = \int_0^1 \cos(t^n) dt$$

$$J_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2 + t^n} dt$$

12 Annexe : quelques éléments de démonstrations

Coïncidence des deux définitions de l'intégrale (page 4)

Soit f continue par morceaux sur $[a, b]$. f est bornée sur ce segment et il existe M réel tel que $|f| \leq M$. Pour $x \in [a, b]$, par relation de Chasles dans le cadre de l'intégration sur un segment,

$$\int_a^b f - \int_a^x f = \int_x^b f$$
$$\left| \int_a^b f - \int_a^x f \right| \leq (b-x)M \text{ par inégalité triangulaire}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow b} (b-x)M = 0$, par le théorème d'encadrement, $\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f = \int_a^b f$. Le membre de gauche est la nouvelle définition de l'intégrale, le membre de droite est l'ancienne. Les deux définitions sont bien égales.

Propriété 2

Pour $x \in [a, b]$, $\int_a^x f = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a)$, donc, facilement, $\int_a^b f$ converge si, et seulement si, F admet une limite finie en b .

Notons $g : x \mapsto \int_x^b f$. On a

$$\forall x \in [a, b[, \quad g(x) = \lim_b F - F(x)$$

donc g est dérivable et $g' = -f$.

Propriété 4

Par exemple dans le cadre où $I = [a, b]$, la démonstration est facile en repassant aux intégrales partielles, pour lesquelles on a déjà établi en première année la linéarité de l'intégrale.

Propriété 6

Par exemple dans le cadre où $I = [a, b]$, la démonstration est facile en repassant aux intégrales partielles : $\int_a^x f(t) dt \geq 0$ (positivité de l'intégrale sur un segment), et en passant à la limite quand $x \rightarrow b$ dans une inégalité large.

Propriété 7

Dans le cadre où $I = [a, b]$. Comme f est continue, $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est de dérivée $f \geq 0$, donc croissante sur I . Par positivité de l'intégrale, $F \geq 0$. Enfin, $\lim_b F = 0$. Donc F est nulle sur I . En dérivant, $F' = f$ est nulle sur I .

On déduit de cette propriété que si f est continue, positive et non nulle sur I , alors $\int_I f > 0$.

Propriété 8

On applique la propriété 6 à $f - g$ et on utilise la linéarité.

Propriété 9

Démonstration dans le cas où $I = [a, b]$. On applique la relation de Chasles pour les intégrales partielles : $\int_a^x f = \int_a^c f + \int_c^x f$, et on fait tendre x vers b .

Changement de variables (propriétés 15 et 16)

- Soit F une primitive de f sur I .

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = [F(\varphi(t))]_c^d = [F(u)]_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(u) du$$

- Démonstration dans le cadre où φ est strictement croissante et où l'intégrale est impropre (généralisée) en b ; φ réalise une bijection de $] \alpha, \beta[$ dans $] a, b[$ avec $a = \lim_{x \rightarrow \alpha} \varphi(x)$ et $b = \lim_{x \rightarrow \beta} \varphi(x)$. La bijection réciproque φ^{-1} est également continue et strictement croissante sur $] a, b[$, d'après le théorème de la bijection. On se ramène une nouvelle fois à un segment en

introduisant $y \in [a, b[$. Il existe $x \in [\alpha, \beta[$ tel que $y = \varphi(x)$.

$$\int_a^y f(t) dt = \int_\alpha^x f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$$

Quand $y \rightarrow b$, on a $x = \varphi^{-1}(y) \rightarrow \varphi^{-1}(b) = \beta$.

Le résultat du changement de variables reste vrai si f est seulement continue par morceaux (admis).

Propriété 10

On pose $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$.

Pour $x \leq y$, par positivité de l'intégrale ayant $f \geq 0$, on a $\int_x^y f(t) dt \geq 0$. Donc $F(y) - F(x) \geq 0$.

Ainsi $(x \leq y) \Rightarrow (F(x) \leq F(y))$ et F est croissante.

Si f est continue, on peut aussi rédiger ainsi : $\forall x \in [a, b[, F'(x) = f(x) \geq 0$ donc F est croissante.

Par le théorème de la limite monotone, F admet une limite en b , et

- cette limite est finie si, et seulement si, F est majorée,
- cette limite est $+\infty$ si, et seulement si, F n'est pas majorée.

Théorème 2

On part de $0 \leq f \leq g$. Si $\int_a^b g$ converge, alors ses intégrales partielles sont majorées : il existe M réel tel que pour tout x dans $[a, b[, \int_a^x g \leq M$. Par croissance de l'intégrale,

$$\int_a^x f \leq \int_a^x g \leq M$$

Les intégrales partielles de $x \mapsto \int_a^x f$ sont donc majorées, et par la propriété précédente, $\int_a^b f$ converge.

Propriétés 12 et 13

Montrons que : $\int_a^b |f|$ converge $\Rightarrow \int_a^b f$ converge.

Premier cas : f est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On introduit $f^+ = \frac{f+|f|}{2}$ et $f^- = \frac{|f|-f}{2}$. Avec $\begin{cases} 0 \leq f^+ \leq |f| \\ 0 \leq f^- \leq |f| \end{cases}$ et le théorème de majoration, $\int_a^b f^+$ et $\int_a^b f^-$ convergent. On termine avec $f = f^+ - f^-$.

Deuxième cas : f est à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On utilise cette fois $0 \leq |\operatorname{Re}(f)| \leq |f|$ et $0 \leq |\operatorname{Im}(f)| \leq |f|$. avec le théorème de majoration, les intégrales $\int_a^b \operatorname{Re}(f)$ et $\int_a^b \operatorname{Im}(f)$

convergent absolument. Par le premier cas, ces intégrales convergent, puis $\int_a^b f$ converge.

Montrons que $L^1(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$.

$L^1(I, \mathbb{K}) \subset \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$. La fonction nulle est intégrable, d'intégrale nulle.

Soient λ réel, f et g dans $L^1(I, \mathbb{K})$. On a

$$|\lambda f + g| \leq |\lambda| |f| + |g|$$

et on peut appliquer le théorème de majoration.

Théorèmes 3 et 4

- Si $f = O(g)$ au voisinage de b et g est intégrable sur $[a, b]$, il existe $c \in [a, b[$ et $k \geq 0$ tel que

$$\forall t \in [c, b[, |f(t)| \leq k|g(t)|$$

Par hypothèse d'intégrabilité de g , $\int_c^b k|g|$ converge. Par théorème de majoration (les fonctions sont bien positives), $\int_c^b |f|$

converge, et donc aussi $\int_a^b |f|$ converge. f est intégrable sur $[a, b]$.

- Si $f \sim_b g$, alors $f = O(g)$ et $g = O(f)$ et on peut appliquer le premier point.

Propriété 17

Dans les trois cas, l'intégrabilité de f a déjà été établie (propriétés 3 et 4).

- Si $f = O(g)$ au voisinage de b et g est positive et intégrable sur $[a, b]$, il existe $c \in [a, b]$ et $k \geq 0$ tel que

$$\forall t \in [c, b], \quad |f(t)| \leq kg(t)$$

Par inégalité triangulaire, croissance de l'intégrale, linéarité de l'intégrale,

$$\left| \int_x^b f \right| \leq \int_x^b |f| \leq k \int_x^b g$$

On a donc établi que $\int_x^b f = O\left(\int_x^b g\right)$ au voisinage de b .

- Supposons que $f = o(g)$ au voisinage de b et g est positive et intégrable sur $[a, b]$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\forall t \in [c, b], \quad |f(t)| \leq \varepsilon g(t)$$

Comme précédemment,

$$\left| \int_x^b f \right| \leq \int_x^b |f| \leq \varepsilon \int_x^b g$$

On a donc établi que $\int_x^b f = o\left(\int_x^b g\right)$ au voisinage de b .

- Supposons que $f \sim g$ au voisinage de b et g est positive et intégrable sur $[a, b]$. Alors $f - g = o(g)$ au voisinage de b . Par le point précédent, $\int_x^b (f - g) = o\left(\int_x^b g\right)$, et par linéarité de l'intégrale,

$$\int_x^b f - \int_x^b g = o\left(\int_x^b g\right)$$

Propriété 18

Comme g est positive et non intégrable, on a $\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x g = +\infty$.

- Si $f = O(g)$ au voisinage de b et g est positive et intégrable sur $[a, b]$, il existe $c \in [a, b]$ et $k \geq 0$ tel que

$$\forall t \in [c, b], \quad |f(t)| \leq kg(t)$$

On a

$$\left| \int_a^x f \right| \leq \int_a^x |f| \leq \int_a^c |f| + k \int_c^x g \leq \int_a^c |f| + k \int_a^x g$$

puis

$$0 \leq \frac{\left| \int_a^x f \right|}{\int_a^x g} \leq \underbrace{\frac{\int_a^c |f|}{\int_a^x g}}_{\text{de limite nulle en } b, \text{ donc bornée}} + k$$

Donc $\left| \int_a^x f \right| = O\left(\int_a^x g\right)$.

- On suppose que $f = o(g)$ au voisinage de b et que g est positive et intégrable sur $[a, b]$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\forall t \in [c, b], \quad |f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} g(t)$$

On a

$$\left| \int_a^x f \right| \leq \int_a^x |f| \leq \int_a^c |f| + \frac{\varepsilon}{2} \int_c^x g \leq \int_a^c |f| + \frac{\varepsilon}{2} \int_a^x g$$

puis

$$0 \leq \frac{\int_a^x |f|}{\int_a^x g} \leq \underbrace{\frac{\int_a^c |f|}{\int_a^c g}}_{\text{de limite nulle en } b} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Il existe $d \in [c, b[$ tel que pour $x \in [d, b[$, $\frac{\int_a^x |f|}{\int_a^x g} \leq \frac{\varepsilon}{2}$, et $0 \leq \frac{\int_a^x |f|}{\int_a^x g} \leq \varepsilon$.

Donc $\left| \int_a^x f \right| = o\left(\int_a^x g\right)$.

- On écrit $f - g = o(g)$ pour se ramener au cas précédent.

Exercice sur les intégrales Gamma en page 10

• convergence

Notons f la fonction $t \mapsto t^{\nu-1}e^{-t}$. Comme $f(t) = e^{(\nu-1)\ln t}e^{-t}$ pour $t > 0$, f est continue sur $]0, +\infty[$.

Comme f est positive, l'existence de $\Gamma(\nu)$ équivaut à l'intégrabilité de f sur $]0, +\infty[$.

On a $f(t) \sim_0 \frac{1}{t^{1-\nu}}$. Par le critère d'équivalence, f est intégrable sur $]0, 1[$ si, et seulement si, $t \mapsto \frac{1}{t^{1-\nu}}$ l'est, soit si, et seulement si, $1 - \nu < 1$, ou encore $\nu > 0$.

On en déduit que pour $\nu \leq 0$, l'intégrale $\Gamma(\nu)$ diverge. Et on suppose donc désormais : $\nu > 0$.

Par croissances comparées :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\nu+1}e^{-t} = 0 \quad \text{donc} \quad f(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (intégrabilité de Riemann). Par le théorème de négligeabilité, f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Ainsi, pour $\nu > 0$, l'intégrale $\Gamma(\nu)$ converge. Et finalement :

L'intégrale $\Gamma(\nu)$ converge si, et seulement si, $\nu > 0$.

• relation entre $\Gamma(\nu + 1)$ et $\Gamma(\nu)$

Soit $\nu > 0$. On a : $\Gamma(\nu + 1) = \int_0^{+\infty} t^\nu e^{-t} dt$ et $\Gamma(\nu) = \int_0^{+\infty} t^{\nu-1} e^{-t} dt$.

On effectue une intégration par parties avec les fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ données par :

$$u(t) = t^\nu \quad u'(t) = \nu t^{\nu-1} \quad v(t) = -e^{-t} \quad v'(t) = e^{-t}$$

Les intégrales $\Gamma(\nu)$ et $\Gamma(\nu + 1)$ convergent, et de plus $\lim_{A \rightarrow 0} A^\nu = 0$ car $\nu > 0$, et, par croissance comparée, $\lim_{B \rightarrow +\infty} B^\nu e^{-B} = 0$.

Par propriété d'intégration par parties

$$\int_0^{+\infty} t^\nu e^{-t} dt = 0 - 0 + \nu \int_0^{+\infty} t^{\nu-1} e^{-t} dt \quad \text{soit} \quad \Gamma(\nu + 1) = \nu \Gamma(\nu)$$