

Mathématiques avec Python — préparation à l'oral

Exercice 1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose $u_0(a) = a$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1}(a) = \operatorname{Arctan} \left(\frac{u_n(a)}{1 + \sqrt{1 + u_n(a)^2}} \right).$$

a. Écrire une fonction d'en-tête `suite(a, m)` et renvoie la liste $(u_0(a), \dots, u_m(a))$.
Tester cette fonction en affichant `suite(0, 20)` puis `suite(1, 20)` et `suite(2023, 20)`.

b. Tracer le graphe de la fonction $2^{10}u_{2^{10}}$ sur l'intervalle $[-30, 30]$ avec un pas de 0,01.

(0,1 suffit)

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $A_n : \theta \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k\theta)}{k}$ sur $[-\pi, 3\pi]$.

Tracer le graphe de A_n pour tout n dans $\llbracket 1, 10 \rrbracket$ puis pour tout n dans $\llbracket 100, 110 \rrbracket$.

Exercice 3. Une matrice *stochastique* est une matrice carrée à coefficients réels positifs telle que sur chaque ligne, la somme des coefficients soit égale à 1.

a. Écrire une fonction d'en-tête `ligne(n)` qui prend en entrée un entier n et renvoie un n -uplet de nombres positifs dont la somme vaut 1.

aléatoires

b. Écrire une fonction d'en-tête `ST(n)` qui prend en entrée un entier n et renvoie une matrice stochastique de taille n .

c. Engendrer des matrices stochastiques de taille 4 ou 5 et calculer de grandes puissances. Émettre une conjecture.

Exercice 4. Pour tout t dans $[0, +\infty[$, on considère la matrice $M(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On sait que les valeurs propres de $M(t)$ sont réelles. On les note $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)$ dans l'ordre croissant.

a. Écrire une fonction `spectre(t)` qui prend un flottant t en entrée et renvoie le triplet $[\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)]$.

b. Représenter graphiquement les fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sur le segment $[-3, 3]$.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs.

entiers

a. Écrire une fonction en Python qui prend en entrée un entier n et qui renvoie une matrice aléatoire de $\mathcal{E}_n$.

b. Utiliser cette fonction pour créer de telles matrices et afficher les valeurs propres. Commenter le signe de ces valeurs propres.

Exercice 6. Déterminer les points critiques de la fonction

$$f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2.$$

Représenter graphiquement f et conjecturer la nature des points critiques. Prouver enfin les résultats conjecturés.

Exercice 7. On définit une fonction φ sur $\mathbb{R}$ en posant

$$\forall x \geq 0, \quad \varphi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \operatorname{ch}(2\sqrt{x} \sin(t)) \, dt, \quad \forall x \leq 0, \quad \varphi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(2\sqrt{-x} \sin(t)) \, dt.$$

Représenter la fonction φ sur $[-3, 5]$ et sur $[-1000, 0]$.

Exercice 8. Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes mutuellement indépendantes qui suivent la même loi. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des X_k . On définit

$$Y = \sum_{k=1}^N X_k.$$

Dans cette question, la loi des X_k est $\mathcal{B}(50, 1/50)$ et celle de N est $\mathcal{P}(1/12)$.

Écrire une fonction qui simule la variable aléatoire Y . Réaliser une série de 100000 expériences. Estimer la moyenne et l'écart-type de Y .

Exercice 9. Soient n et N deux entiers supérieurs ou égaux à 2. On dispose de N urnes et de n boules. Chaque boule est déposée dans l'une des urnes, choisie équiprobablement parmi les N urnes disponibles. Les choix sont supposés indépendants.

On note T_n la variable aléatoire égale au nombre d'urnes vides à la fin du processus.

a. Écrire une fonction d'en-tête `remplir(n, N)` qui renvoie une liste de longueur N représentant le nombre de boules dans chacune des urnes à la fin du processus.

b. Écrire une fonction d'en-tête `nb_urnes_vides(n, N)` qui renvoie le nombre d'urnes vides à la fin du processus (c'est en somme une simulation de T_n).

c. Écrire une fonction d'en-tête `esp(n, N, taille)` qui effectue `taille` fois le processus et renvoie la moyenne de T_n sur ces expériences.

d. Prendre N égal à 10 et `taille` égal à 1000 et faire varier n de 1 à 100. Représenter graphiquement les points $(n, \mathbb{E}(T_n))$.

Exercice 10. a. Écrire une fonction `legendre(n)` qui prend en entrée un entier n et renvoie en sortie le polynôme de Legendre de rang n , défini par

$$P_n = \frac{1}{2^n n!} ((X^2 - 1)^n)^{(n)}.$$

b. Écrire une deuxième fonction ayant le même objectif, cette fois en se basant sur la construction par récurrence

$$P_0 = 1, \quad P_1 = X, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} X P_n - \frac{n}{n+1} P_{n-1}.$$

Exercice 11. On note α l'unique¹ l'équation $\operatorname{sh}(x) = 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^\alpha \operatorname{sh}^n(t) \, dt.$$

a. Déterminer un encadrement de α de longueur 10^{-5} .

b. Écrire une fonction d'en-tête `suite(n)` qui renvoie une valeur approchée de $I_0, \dots, I_n$.

Exercice 12. On considère des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les relations de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + (u_n^2) + (v_n)^2 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{v_n}{2} + (v_n)^2 + (u_n)^2.$$

a. Représenter sous forme de polygone les dix premiers termes de la suite (u_n, v_n) en effectuant les choix suivants pour le couple (u_0, v_0) .

$$(1/4, 1/5), (-1/4, 1/5), (1/4, -1/5), (1, 1/5), (1/4, 1).$$

b. Conjecturer la convergence/divergence de la suite $((u_n, v_n))_{n \geq 0}$ selon la condition initiale.

1. Il faut bien sûr savoir justifier précisément l'existence et l'unicité de cette solution.