Feuille d'exercices n° 17 **MP**
Intégrales à paramètres **2024-2025**

($\star$) Exercice 1 Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$.

($\star$) Exercice 2 Soit $f_n(x) = \begin{cases} 1/n & \text{si } x \in [0,n] \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n$.

($\star\star$) Exercice 3 Calcul de l'intégrale de Gauss. Soient $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2t^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que g est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^+$. Vérifier que g est bornée.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et solution de l'équation différentielle : $y' - 2xy = -2I$.
3. En déduire que $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

($\star\star$) Exercice 4 On donne $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. On considère $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $[0,+\infty[$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer que f vérifie l'équation différentielle $y' - y = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$. En déduire l'expression de f.

($\star\star$) Exercice 5 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+1}\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

1. Justifier l'existence de l'intégrale définissant J_n.
2. Calculer $J_{n+1} - J_n$. En déduire l'identité $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$.

($\star\star$) Exercice 6
Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x)\,\mathrm{d}x$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}$.

($\star$) Exercice 7 Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(x/n)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

($\star\star$) Exercice 8 Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{\operatorname{ch} t}\,\mathrm{d}t = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

($\star\star$) Exercice 9 Pour $x > 0$, on pose $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$. Justifier que g est bien définie.

Montrer que $g(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

($\star$) **Exercice 10**

1. Montrer que pour tout réel y, on a $|\arctan y| \leqslant |y|$. On considère :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

2. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, calculer $F'(x)$, en déduire $F(x)$.

($\star\star$) **Exercice 11** En travaillant sur les sommes partielles de la série, étudier la convergence et calculer la somme de la série $\sum u_n$, où $u_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x$.

($\star$) **Exercice 12** Calculer la limite quand n tend vers l'infini des quantités suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^n (1-\frac{x}{n})^n \cos x\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n x\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

($\star\star$) **Exercice 13** Pour $x > 0$, on pose $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que g est bien définie.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et calculer $g'(x)$.
3. En déduire $g(x)$.

($\star\star$) **Exercice 14** Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n}\,\mathrm{d}t$.

1. Pour quelles valeurs de n, l'intégrale u_n est-elle bien définie ?
2. Calculer $\lim u_n$.
3. La série $\sum u_n$ est-elle convergente ?
4. Montrer que la série $\sum (-1)^n u_n$ converge et calculer sa somme S sous forme d'une intégrale.
5. Effectuer le changement de variables $t = \sqrt[3]{2}u$ puis calculer S.

($\star\star$) **Exercice 15** On donne $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Pour x réel, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \exp\Big(-(t^2 + \frac{x^2}{t^2})\Big)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
3. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par F sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
4. En déduire une expression simple de F sur $\mathbb{R}$.

($\star\star$) Exercice 16 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Étudier la limite quand n tend vers l'infini de $\int\limits_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t$.

($\star\star\star$) Exercice 17 $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Donner un équivalent de f en $+\infty$.
3. Donner un équivalent de f en 0^+.

($\star$) Exercice 18 $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et donner une équation différentielle satisfaite par g.
2. Déterminer un équivalent de g en $+\infty$.

($\star$) Exercice 19 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t+\cdots+t^n}}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la suite (J_n) est bien définie et calculer J_1.
2. Déterminer la limite ℓ de la suite (J_n).

($\star$) Exercice 20 Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue et bornée. On appelle *transformée de Laplace* de f l'application $L(f)$ définie sur $]0,+\infty[$ par

$$L(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que $L(f)$ est bien définie, et continue sur $]0,+\infty[$.
2. Déterminer la limite de $xL(f)(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. On suppose que f admet la limite finie ℓ en $+\infty$. Déterminer la limite de $xL(f)(x)$ quand x tend vers 0^+.

($\star$) Exercice 21 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int\limits_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
2. À l'aide du changement de variables $u = t^n$, déterminer un équivalent de I_n. L'équivalent obtenu sera donné à l'aide d'une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer.

($\star\star$) Exercice 22 Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t \ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que l'intégrale I converge. Montrer que $I = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

($\star\star$) Exercice 23 On note $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\,\mathrm{d}u$.

1. Montrer que $\psi : u \mapsto \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$ est intégrable sur $I =]0,+\infty[$.

2. Déterminer les valeurs du réel x pour lesquelles $F(x)$ est bien défini.
3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et exprimer $F'(x)$ sous forme intégrale.

($\star\star$) Exercice 24 Pour $x > 0$, on pose $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\,\mathrm{d}t$. On note $f(x,t) = \frac{\sin t}{t} e^{-xt}$.

1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer $g'(x)$ sous forme intégrale.
2. Calculer $\int_0^{+\infty} e^{(\mathrm{i}-x)t}\,\mathrm{d}t$ et en déduire $g'(x)$.
3. Déterminer la limite de g en $+\infty$, ainsi que l'expression de g à l'aide de fonctions usuelles.
4. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

($\star\star$) Exercice 25 Développer en série $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

($\star$) Exercice 26 Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $\int_0^1 \frac{1-t}{1-xt^3}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}$.

En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$.

($\star\star$) Exercice 27 Établir l'identité $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

($\star\star$) Exercice 28 Pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Donner le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.
2. Calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $|x| < R$.

($\star$) Exercice 29 $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \operatorname{sh}(x\sqrt{t})\,\mathrm{d}t$. On donne :

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ pour } a > 0, \text{ et } \Gamma(a+1) = a\Gamma(a) \text{ pour } a > 0$$

Enfin, on donne $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et déterminer ce développement en série entière.
3. En déduire l'expression de f à l'aide de fonctions usuelles.

Banque épreuve orale CCINP

Analyse : 25, 26, 27, 29, 30, 49, 50.
