

Révisions sur les suites numériques

(★) **Exercice 1** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2n+2k-1}$. Montrer que (u_n) est monotone et convergente.

(★) **Exercice 2** Soit $f(x) = 2xe^{-x}$ et la suite u donnée par $\begin{cases} u_0 &= 0, 1 \\ u_{n+1} &= f(u_n) \text{ pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1$.
 2. Montrer que la suite u converge vers $\ln 2$.
-

(★★) **Exercice 3** Étudier la suite donnée par $u_0 \geq -2$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$. On sera amené à discuter suivant les valeurs de u_0 .

(★) **Exercice 4** Étudier la monotonie et la convergence des suites réelles suivantes :

1. u donnée par son premier terme u_0 et la relation $u_{n+1} = u_n + e^{u_n}$.
 2. v donnée par son premier terme v_0 et la relation $v_{n+1} = v_n - e^{v_n}$.
 3. w donnée par : $w_0 > 0$ et la relation de récurrence $w_{n+1} = \sqrt{w_n^2 + w_n}$.
-

(★) **Exercice 5** On pose, pour tout réel x , $f(x) = x^2 - x$ et on considère la suite u définie par la valeur de u_0 réel et la relation : $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .

1. Étudier rapidement les variations de f et déterminer le signe de $f(x) - x$.
 2. On suppose que $u_0 > 2$.
 - (a) Montrer que $u_n > 2$ pour tout entier naturel n .
 - (b) En déduire la monotonie de (u_n) . Préciser la limite de u_n quand $n \rightarrow +\infty$.
 - (c) Montrer que pour tout réel x supérieur ou égal à 2, $f'(x) \geq 3$. En déduire que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n \geq 3(u_n - u_{n-1})$, puis que $u_{n+1} - u_n \geq 3^n(u_1 - u_0)$.
 - (d) Retrouver alors le résultat de b).
 3. Ici $u_0 = -3$. Que peut-on dire quant à la convergence de (u_n) ?
 4. On suppose ici que $\frac{1}{2} < u_0 < 2$. Dans le cas où « $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} < u_n < 2$ », que peut-on dire de la monotonie et de la convergence de (u_n) ? En déduire qu'il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} \notin]\frac{1}{2}, 2[$.
-

(★★) **Exercice 6** On considère la fonction f_n définie, pour tout réel x , pour $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$f_n(x) = x^5 + nx - 1$$

1. Montrer que, pour n entier supérieur ou égal à 1, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.
 2. Montrer que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$. Donner un équivalent de u_n .
-

(★★) **Exercice 7** Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \ln x + x - n$.

1. Étudier les variations de f_n et montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n .

2. (a) Montrer que pour $x > 0$, $\ln x \leq x$.
- (b) Montrer que $\frac{n}{2} \leq x_n \leq n$.
- (c) Donner un équivalent de x_n puis montrer que $x_n = n - \ln n + o(\ln n)$.

()** Exercice 8

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel y_n solution de l'équation : $\ln x + x = \frac{1}{n}$.
2. Étudier la convergence de la suite (y_n) . En notant ℓ sa limite, donner un équivalent de $y_n - \ell$ quand n tend vers $+\infty$.

(*) à ()** Exercice 9

1. Calculer les limites suivantes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p$ et $\lim_{p \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p$.

2. Soit x réel. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\lfloor nx \rfloor}$.

3. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\sqrt{n}} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}\right)$$

4. Donner un équivalent de $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, de $\sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln n}$ et $n^2 \ln(\cos(\frac{1}{n})) + \frac{n^2}{2} \sin^2(\frac{1}{n})$.

5. Donner le développement asymptotique à 3 termes de

(a) $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$

(b) $(n+1) \ln(n+1) - n \ln n$

(*) Exercice 10 Étudier la convergence de (z_n) , $z_n = \frac{n^2 + in + 2}{in^2 + 1}$.

Séries numériques

(*) Exercice 11 Étudier la nature des séries de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{\pi}{2n}$

4. $d_n = \ln \left(\cos\left(\frac{2}{n}\right) \right)$

8. $h_n = \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}$

2. $b_n = \frac{n-1}{3^n - 2}$

5. $e_n = ne^{-\sqrt{n}} \ln n$

9. $i_n = \frac{\ln n}{n}$

3. $c_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1$

6. $f_n = \frac{\cos(2n)}{3n^2 - 4n + 1}$

10. $j_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n}$

7. $g_n = \frac{1}{n^2 \ln n}$

()** Exercice 12 À l'aide d'une décomposition en éléments simples, montrer que la série de terme général $\frac{1}{4k^2 - 1}$ est convergente et que sa somme vaut $\frac{1}{2}$.

(*) Exercice 13 Soit $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par :

$$\begin{cases} S_0 & = 1 \\ \text{pour } k \in \mathbb{N}^*, S_k & = X(X-1) \dots (X-k+1) \end{cases}$$

1. Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall P \in \mathbb{R}_p[X], \exists!(a_k)_{0 \leq k \leq p} \in \mathbb{R}^{p+1}, P = \sum_{k=0}^p a_k S_k$$

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré p . Montrer que la série de terme général $\frac{P(n)}{n!}$ converge et déterminer sa somme en fonction des $(a_k)_{0 \leq k \leq p}$.

Application : en déduire que la série de terme général $\frac{n^2}{n!}$ converge et que sa somme est $2e$.

(★) **Exercice 14** Pour $n \geq 0$, $u_n = \frac{\cos n}{2^n}$.

1. Montrer que la série de terme général u_n converge.
 2. Calculer la somme de la série.
-

(★) **Exercice 15** Vérifier que

$$\frac{1}{\binom{n+p}{n}} = \frac{p!}{p-1} \left(\frac{1}{(n+p-1)(n+p-2)\dots(n+1)} - \frac{1}{(n+p)(n+p-1)\dots(n+2)} \right)$$

et en déduire que $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\binom{n+p}{n}}$ converge et calculer sa somme (réponse $\frac{p}{p-1}$).

(★) **Exercice 16** Soit u la suite donnée par $\begin{cases} u_0 \in]0; 1[\\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0; 1[$, que (u_n) est décroissante et étudier sa convergence.
 2. Montrer que $\sum u_n^2$ converge et donner sa somme.
 3. Montrer que $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge.
 4. En déduire, par utilisation d'un théorème de comparaison, que $\sum u_n$ diverge.
-

(★★) **Exercice 17** On considère la suite donnée par $u_0 = -1$ et par la relation $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \sqrt{u_n^2 + 2^{-n}} \right)$.

1. Calculer u_1 . Étudier la monotonie de (u_n) .
 2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{2}(\sqrt{2})^{-n}$ (on pourra utiliser une quantité conjuguée).
 3. En déduire que (u_n) converge.
-

(★★) **Exercice 18** Soit (u_n) une suite à termes positifs ou nuls. Montrer que les séries de termes généraux u_n , $\frac{u_n}{1+u_n}$, $\ln(1+u_n)$ sont de même nature.

(★★) **Exercice 19**

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2 2^k}$. Montrer que cette quantité est bien définie.
 2. Montrer que $0 \leq R_n \leq \frac{1}{(n+1)2^{2n}}$. En déduire une fonction Python permettant de calculer une valeur approchée de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 2^k}$ à une précision $\varepsilon > 0$ près.
-

(★★) **Exercice 20** On considère la série de terme général $u_n = \frac{\sin(2^n)}{2^n}$.

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge absolument. On note $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$, $S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ et $R_n = S - S_n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $|R_n| \leq \frac{1}{2^n}$.

3. Écrire une fonction Python pour l'obtention d'une valeur approchée de S à 10^{-p} près.

(*** **Exercice 21** Calcul de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi}t^2 - t\right) \cos nt \, dt = \frac{1}{n^2}$.

2. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0, \pi]$,

$$\sum_{n=1}^N \cos nt = \frac{1}{2} \sin(Nt) \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} + \frac{1}{2} \cos(Nt) - \frac{1}{2}$$

3. Soit $\varphi : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Montrer que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} \varphi(t) \sin(Nt) \, dt = 0 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} \varphi(t) \cos(Nt) \, dt$$

4. Soit h définie sur $[0, \pi]$ par $h(t) = \frac{t}{\sin \frac{t}{2}}$ pour $t \neq 0$ et $h(0) = 2$.

En appliquant le théorème de la limite de la dérivée, montrer que h est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi]$.

5. Montrer finalement que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(*) **Exercice 22** Montrer que $(n+1) \ln(n+1) - n \ln n \sim \ln n$ et en déduire un équivalent de $\sum_{k=1}^n \ln k$.

(*) **Exercice 23** On considère la suite donnée par $u_0 = 1$ et la relation $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

2. Donner la limite de la suite $\left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right)$. En déduire un équivalent de u_n .

(** **Exercice 24** On pose $u_n = \frac{n!e^n}{\sqrt{2\pi n^{n+\frac{1}{2}}}}$ et $a_n = \ln(u_n)$.

1. Rappeler la formule de Stirling. En déduire $\lim u_n$.

2. Montrer que $a_{n+1} - a_n \sim -\frac{1}{12n^2}$. En déduire que $a_n \sim \frac{1}{12n}$.

3. Montrer finalement que $n! = \sqrt{2\pi n^{n+\frac{1}{2}}} e^{-n} \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

(*** **Exercice 25** Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n + \frac{e^{-u_n}}{n}$.

1. Montrer que la suite u diverge. En déduire que $\lim u_n = +\infty$.

2. Montrer que $e^{u_{n+1}} - e^{u_n} \sim \ln(n+1) - \ln(n)$.

3. Montrer finalement que $u_n = \ln(\ln n) + o(1)$.

(*** **Exercice 26** Soit u une suite réelle vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.

On pose $w_n = e^{u_{n+1}} - e^{u_n}$.

1. Montrer que u_n tend vers $+\infty$.

2. Montrer que $w_n \sim 1$ et en déduire un équivalent de u_n .

3. Montrer que $w_n - 1 \sim \frac{1}{2n}$ et en déduire un développement asymptotique de u_n à une précision $o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.

(★) à (★★) **Exercice 27** Soit (u_n) une suite telle que $u_n = \frac{\cos(u_{n-1})}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$?
 2. Déterminer la limite de (u_n) , un équivalent de u_n , et la nature de la série $\sum u_n$.
 3. À l'aide d'un développement asymptotique de u_n , donner la nature de la série $\sum (-1)^n u_n$.
-

(★★) **Exercice 28**

1. (a) Montrer que $\frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1} + \sqrt{n}} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
(b) Quelle est la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$?
(c) Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1} + \sqrt{n}}$ diverge. Commentaire ?
 2. En discutant sur le réel $\alpha > 0$, déterminer la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1} + n^\alpha}$.
-

(★★) **Exercice 29** En discutant sur les paramètres réels a et b , donner la nature des séries

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^a} \quad \text{et} \quad \sum \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^b} \right)$$

(★) **Exercice 30** Déterminer la nature des séries de terme général :

$$a_n = n \sin \frac{1}{n} \quad b_n = \frac{e^{-2n} + n}{n^2 + 1} \quad c_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$$

(★) **Exercice 31**

1. Trouver trois réels a, b et c tels que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, on ait :

$$\frac{2n-1}{n^3-4n} = \frac{a}{n-2} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n+2}$$

Montrer que $\sum \frac{2n-1}{n^3-4n}$ converge et calculer $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3-4n}$.

2. Montrer par deux méthodes que $\sum \ln \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)$ converge. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)$.
-

(★★) **Exercice 32** On admet (vu en cours) que : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$. On se propose de déterminer

un équivalent de : $u_n = \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \right)$.

1. Vérifier que pour tout $n \geq 2$, $\ln u_n = \sum_{k=2}^n \ln \left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \right)$.
2. Montrer que $\sum \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ converge.
3. Montrer que la série $\sum \ln \left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \right)$ diverge.
4. On considère $a_n = \ln u_n - \ln(u_{n-1}) - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} - \frac{(-1)^{3n}}{3n\sqrt{n}}$. Donner la nature de la série de terme général a_n .

5. On pose

$$C_n = \sum_{k=3}^n \left(\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} + \frac{(-1)^{3k}}{3k\sqrt{k}} + a_k \right) + \frac{3}{4} + \ln u_2 - \frac{1}{2}\gamma$$

Justifier que la suite (C_n) est convergente.

6. En déduire l'existence d'une constante C telle que $\ln u_n = -\frac{1}{2} \ln n + C + o(1)$. Donner alors un équivalent de u_n .

(★) **Exercice 33**

1. Montrer que la série $\sum \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ converge et donner sa somme.

2. (a) Donner un équivalent de $u_k = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$. Retrouver que la série $\sum \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ converge.

(b) Déduire de a. la nature de la série de terme général ku_k .

(★) **Exercice 34** Pour n entier naturel non nul, on pose $I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$.

1. Montrer que $\forall x \in [1, e], \ln x \leq \frac{x}{e}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

2. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$.

(b) En déduire qu'il existe une constante $k \neq 0$, à préciser, telle que $I_n \sim \frac{k}{n}$.

(c) Quelle est la nature de la série de terme général I_n ?

(d) Quelle est la nature de la série de terme général $(-1)^n \frac{I_n}{n}$?

3. On donne $I_0 = \frac{1}{3}(e^3 - 1)$. Écrire un programme en Python qui calcule et affiche les valeurs de I_1, \dots, I_{50} . Retrouvez-vous 1.b. et pourquoi ?

(★) **Exercice 35** x désigne un réel élément de $[0, 1[$.

1. (a) Pour tout n de \mathbb{N}^* et pour tout t de $[0, x]$, calculer la somme $\sum_{p=1}^n t^{p-1}$.

(b) En déduire que : $\sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$.

(c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.

(d) Établir alors que la série de terme général $\frac{x^p}{p}$ est convergente et que $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x)$.

2. Après avoir vérifié que, pour tout entier naturel n non nul, on a $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, montrer que la série de terme général $\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ est convergente et que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x + (1-x) \ln(1-x)$$

(★) **Exercice 36**

1. Pour k entier supérieur ou égal à 2, montrer que :

$$\int_{k-1}^k (\ln t)^2 dt \leq (\ln k)^2 \leq \int_k^{k+1} (\ln t)^2 dt$$

Vérifier que l'inégalité de droite est aussi vérifiée pour $k = 1$.

2. On pose $S_n = \sum_{k=2}^n (\ln k)^2$.

(a) Montrer que pour $n \geq 3$, on a : $\int_1^n (\ln t)^2 dt \leq S_n \leq \int_1^n (\ln t)^2 dt + (\ln n)^2$.

(b) Vérifier que la fonction $t \mapsto t((\ln t)^2 - 2 \ln t + 2)$ est une primitive de $t \mapsto (\ln t)^2$.

(c) Montrer alors que $S_n \sim n(\ln n)^2$.

3. On pose $b_n = n(\ln n)^2$ et $w_n = S_n - b_n$, pour $n \geq 2$, et $w_1 = 0$.

(a) Vérifier que $w_n = \sum_{k=2}^n (w_k - w_{k-1})$.

(b) Montrer que $w_k - w_{k-1} \sim -2 \ln k$. En déduire que $\lim w_n = -\infty$.

(★) **Exercice 37** En discutant en fonction de $a \in \mathbb{R}$, donner la nature de la série

$$\sum (n^3 + an)^{1/3} - \sqrt{n^2 + 3}$$

(★★) **Exercice 38** Donner un équivalent de $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}$ (on pourra effectuer une comparaison série-intégrale).

(★★★) **Exercice 39** (oral Mines-Télécom)

Déterminer la nature de $\sum R_n$, où $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2}$.

Séries vectorielles (pour plus tard)

(★) **Exercice 40** Prouver la convergence et déterminer la somme de la série $\sum A^k$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(★) **Exercice 41** Soit $a \in \mathbb{C}$. Étudier la convergence de la série $\sum A^n$ où $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(★★) **Exercice 42** Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$. Pour $P \in E$, on pose $D(P) = P'$ et $T(P) = P(X+1)$. On admet que D et T sont des endomorphismes de E . Montrer que la série $\sum \frac{D^k}{k!}$ converge et que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{D^k}{k!} = T$.

(★★) **Exercice 43** Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et $f : E \rightarrow E$ pour laquelle il existe $k \in [0, 1[$ tel que

$$\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$$

1. Montrer que f possède au plus un point fixe (vecteur v tel que $f(v) = v$).
 2. Soit $a \in E$ et la suite u définie par $u_0 = a$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
 - (a) Montrer que la série $\sum u_{n+1} - u_n$ converge.
 - (b) En déduire que f admet un point fixe.
-

Banque épreuve orale CCINP

Séries numériques : 5, 6, 7, 8. 1), 43, 46.
Séries vectorielles : 61.
