Lycée du Parc
840
François Giraud, Cécile Le Goff, Marie Peronnier, Valentine Roos

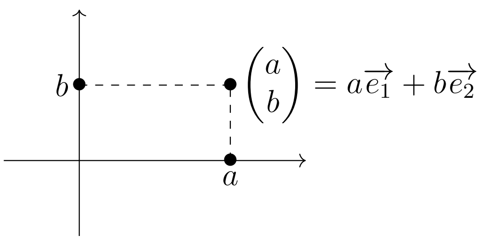
Introduction aux nombres complexes

Vidéos correspondantes sur la chaîne YouTube "Maths PCSI Lycée du Parc".

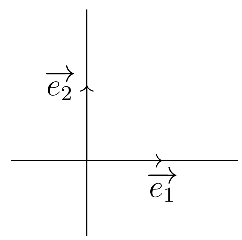
1 Définition des nombres complexes

Un point du plan est un point du type (a, b) où a et b sont des réels. On note aussi $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. On assimile un point M du plan au vecteur $\overrightarrow{OM}$, ce qui est possible si l'on fixe l'origine O du plan.

Si on munit le plan de la base orthonormée $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ avec $\overrightarrow{e_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{e_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a



avec

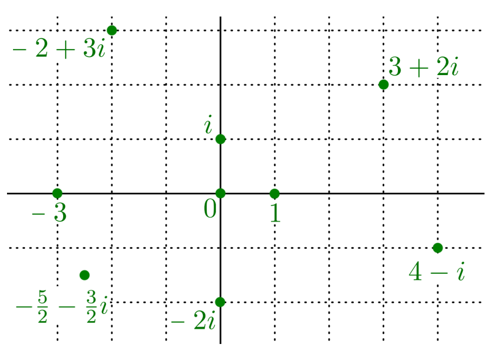


L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes peut être défini comme l'ensemble $\mathbb{R}^2$ dans lequel :

- Les vecteurs de la forme $a\overrightarrow{e_1}$ sont simplement notés a.
  Le vecteur $\overrightarrow{e_1}$ est assimilé au réel 1, l'axe des abscisses (et donc l'ensemble de tous les vecteurs de la forme $a\overrightarrow{e_1}$) est assimilé à la droite réelle, notée $\mathbb{R}$.

- Le vecteur $\overrightarrow{e_2}$ est noté i.
  L'axe des ordonnées est l'ensemble des nombres de la forme ib avec b réel. Il est noté $i\mathbb{R}$.

Définition 1. Un nombre complexe z est un point $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ du plan que l'on note $a + ib$.



- a s'appelle la **partie réelle** de z, notée $\mathcal{R}e(z)$.

- b s'appelle la **partie imaginaire** de z, notée $\mathcal{I}m(z)$.

Un nombre complexe écrit sous la forme $a + ib$ est dit sous **forme algébrique**.
Un nombre du type ib (un nombre dont la partie réelle est nulle) est appelé **imaginaire pur**.

Remarque. *Par définition, deux nombres complexes sont égaux s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.*

Autrement dit : si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a l'équivalence logique :

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} \mathcal{R}e(z_1) & = & \mathcal{R}e(z_2) & \textit{(identification des parties réelles)} \\ \mathcal{I}m(z_1) & = & \mathcal{I}m(z_2) & \textit{(identification des parties imaginaires)} \end{cases}$$

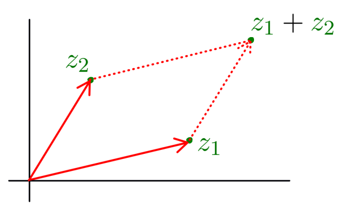
Moralement, **un complexe** *est la donnée de* **deux réels**.

2 Somme de nombres complexes

Définition 2 (Somme)**.** *Si $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, alors la somme vectorielle $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ est égale à $\begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}$.*

La somme sur les complexes est définie comme étant une simple traduction dans les complexes de la somme sur les vecteurs.

En notation complexe, si $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$, alors $z_1 + z_2 := (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$.



Remarque. *De manière équivalente, on peut définir la somme de deux nombres complexes z_1 et z_2 par les relations* $\begin{cases} \mathcal{R}e(z_1 + z_2) := \mathcal{R}e(z_1) + \mathcal{R}e(z_2), \\ \mathcal{I}m(z_1 + z_2) := \mathcal{I}m(z_1) + \mathcal{I}m(z_2). \end{cases}$

Proposition 1. *Pour tous $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$,*

- $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ *(commutativité)*
- $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ *(associativité)*

La propriété d'associativité permet d'écrire sans parenthèses $z_1 + z_2 + z_3$ sans ambiguïté.

Exercice 1. On note $z = -3 + 2i$.
Placer dans le plan complexe : $z + 1$, $z - 1$, $z + i$, $z - i$ et $z + 5 - 3i$.

3 Produit de nombres complexes

Soit $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$. Imaginons que l'on ait un produit qui vérifie la propriété de distributivité, on aurait alors

$$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ia_2 b_1 + i^2 b_1 b_2.$$

Pour définir ce produit, il faut et il suffit de décider d'une valeur de i^2. On **choisit**

$$i^2 := -1$$

Ce choix est bien un choix arbitraire, mais il n'est pas fait sans raisons stratégiques, raisons difficiles à décrire pour le moment, mais qui s'éclairciront petit à petit.

Définition 3 (Produit)**.** *Soit* $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$, *on définit*

$$z_1 z_2 := (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Il s'agit du produit que l'on obtient mécaniquement lorsque l'on décide que $i \times i$, *càd* i^2, *vaut* -1.

Remarque. *De manière équivalente, on peut définir le produit de deux nombres complexes* z_1 *et* z_2 *par les relations* $\begin{cases} \mathcal{R}e(z_1 z_2) := \mathcal{R}e(z_1)\mathcal{R}e(z_2) - \mathcal{I}m(z_1)\mathcal{I}m(z_2), \\ \mathcal{I}m(z_1 z_2) := \mathcal{R}e(z_1)\mathcal{I}m(z_2) + \mathcal{R}e(z_2)\mathcal{I}m(z_1). \end{cases}$

En général $\mathcal{R}e(z_1 z_2) \neq \mathcal{R}e(z_1)\mathcal{R}e(z_2)$ et $\mathcal{I}m(z_1 z_2) \neq \mathcal{I}m(z_1)\mathcal{I}m(z_2)$.

Proposition 2. *Pour tous* $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$,

- $z_1 z_2 = z_2 z_1$ *(commutativité)*
- $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ *(associativité)* $\rightsquigarrow$ *cela permet d'écrire* $z_1 z_2 z_3$.
- $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ *(distributivité)*

Démonstration.

1. La commutativité vient du fait que la formule est symétrique en z_1 et z_2.
2. Similaire à la démonstration précédente.
3. On écrit $z_1 := a_1 + ib_1$, $z_2 := a_2 + ib_2$ et $z_3 := a_3 + ib_3$. En se ramenant à la distributivité dans $\mathbb{R}$, on a d'une part :

$$\begin{aligned} z_1(z_2 + z_3) &= (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2 + a_3 + ib_3) \\ &= (a_1 + ib_1)(a_2 + a_3 + i(b_2 + b_3)) \\ &= a_1 a_2 + a_1 a_3 - b_1 b_2 - b_1 b_3 + i(a_2 b_1 + a_3 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_3) \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 + z_1 z_3 &= (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) + (a_1 + ib_1)(a_3 + ib_3) \\ &= a_1 a_2 + a_1 a_3 - b_1 b_2 - b_1 b_3 + i(a_2 b_1 + a_3 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_3) \end{aligned}$$

D'où l'égalité $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

$\square$

Exercice 2. Déterminer la forme algébrique des complexes suivants :

$$z_1 = (1+i)(2+3i) \qquad z_2 = i(3-2i)(1+i) \qquad z_3 = (2+i)^2 - i(1-2i)^2$$

Remarque. *Les trois identités remarquables*

- $(z_1+z_2)^2 = z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2$
- $(z_1-z_2)^2 = z_1^2 - 2z_1z_2 + z_2^2$
- $z_1^2 - z_2^2 = (z_1-z_2)(z_1+z_2)$

sont automatiquement valables pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ puisqu'elles découlent mécaniquement des propriétés de commutativité et d'associativité.

Remarque. *On peut ainsi définir la soustraction de deux nombres complexes. On commence par définir l'opposé $-z := (-1) \times z$ puis la soustraction $z_1 - z_2 := z_1 + (-z_2)$.*

Exercice 3. Pour un nombre complexe z quelconque, représenter dans le plan complexe : $-z$, $2z$, $\frac{1}{2}z$, $-\frac{1}{2}z$ puis l'ensemble des λz, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proposition 3. *Si $z \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :*

$$\mathcal{R}e(\lambda z) = \lambda \mathcal{R}e(z) \quad \text{et} \quad \mathcal{I}m(\lambda z) = \lambda \mathcal{I}m(z).$$

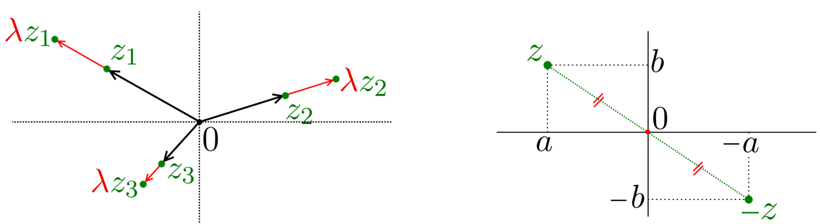
Démonstration. Soit $z := a + ib \in \mathbb{C}$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\lambda z = \lambda a + i\lambda b,$$

ce qui implique bien que $\begin{cases} \mathcal{R}e(\lambda z) & = & \lambda a = \lambda \mathcal{R}e(z) \\ \mathcal{I}m(\lambda z) & = & \lambda b = \lambda \mathcal{I}m(z) \end{cases}$.

□

Remarque. *La multiplication par $\lambda \in \mathbb{R}$ (la transformation $z \mapsto \lambda z$) revient à opérer une homothétie de rapport λ. En particulier, $z \mapsto -z$ est une symétrie par rapport à l'origine.*



Exercice 4. Calculer et représenter dans le plan les puissances de i : i, i^2, i^3, i^4, et de façon générale i^n pour $n \in \mathbb{N}$.

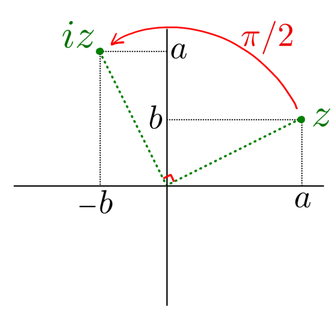
Remarque. *Multiplier un nombre complexe par i revient dans le plan à opérer une rotation autour de l'origine d'angle $\frac{\pi}{2}$.*

Démontrons-le. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On a :

$$iz = i(a+ib) = -b + ia$$

On remarque alors que le vecteur $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, càd le vecteur associé à iz, est orthogonal au vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ associé à z, puisque leur produit scalaire donne :

$$\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -ba + ab = 0$$



Les deux vecteurs représentant les complexes z et iz sont donc orthogonaux, ce qui se traduit bien par un angle droit (càd de mesure $\dfrac{\pi}{2}$) entre les deux segments $[O, z]$ et $[O, iz]$. Le dessin nous montre le sens de rotation.

4 Inverse d'un nombre complexe

Théorème 4.
Soit $z \in \mathbb{C}^\star$ (c'est-à-dire z complexe non nul), alors il existe un unique complexe, noté $\frac{1}{z}$, tel que $z \times \frac{1}{z} = 1$. Le complexe $\frac{1}{z}$ est appelé **inverse** de z.

Si $z = a + ib$ (où au moins l'un des deux réels a et b est non nul), alors: $\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$.

Démonstration.
Soit $z = a + ib$, non nul. On cherche un nombre complexe $u = c + id$ tel que $zu = 1$.
On forme le produit $zu = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$.
Si le nombre complexe u vérifie bien $zu = 1$, alors on a, par identification des parties réelle et imaginaire,

$$\begin{cases} ac - bd = 1 & (1) \\ ad + bc = 0 & (2) \end{cases}$$

En faisant $a(1) + b(2)$, on obtient $c(b^2 + a^2) = a$ donc $c = \frac{a}{a^2 + b^2}$. De même, en faisant $a(2) - b(1)$, on obtient $(a^2 + b^2)d = -b$ donc $d = -\frac{b}{a^2 + b^2}$.
Remarque: On peut diviser par $a^2 + b^2$ qui est non nul car on a supposé $a + ib$ non nul, donc au moins un des deux réels a ou b est non nul, ce qui implique $a^2 + b^2 > 0$.

À ce stade de la démonstration, on a démontré que si $uz = 1$, alors $u = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$.
Réciproquement, on vérifie que

$$(a + ib) \times \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{(a + i)(a - ib)}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - (ib)^2}{a^2 + b^2} = 1.$$

□

Remarque. *0 n'a pas d'inverse, puisque pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \times 0 = 0$ (et donc par 1).*

Définition 4 (Quotient)**.** *Pour tous $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}^\star$, on pose $\frac{z_1}{z_2} := z_1 \times \frac{1}{z_2}$.*

Proposition 5. *Pour tous $u, v \in \mathbb{C}$ et $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^\star$, on a :*

$$\frac{u}{z_1} \times \frac{v}{z_2} = \frac{uv}{z_1 z_2} \qquad \frac{u}{z_1} + \frac{v}{z_2} = \frac{uz_2 + vz_1}{z_1 z_2} \qquad \frac{1}{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{z_2}{z_1}$$

Démonstration. Tout comme les identités remarquables, ces égalités sont vraies car la somme et le produit dans $\mathbb{C}$ vérifient les mêmes propriétés que dans $\mathbb{R}$; les démonstrations dans $\mathbb{C}$ sont donc rigoureusement identiques à celles dans $\mathbb{R}$. □

Remarque. *Notons que* $(a+ib)(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2$.

Cette astuce est à retenir, puisque fort utile pour passer des complexes aux réels ! Le complexe $a - ib$ *est appelé le* **conjugué** *du complexe* $a + ib$*, ou encore sa* **quantité conjuguée**.

La notion de conjugaison sera vue dans une autre section de ce cours, mais à ce stade, elle permet de faire des calculs pratiques d'inverses.

Exemple : calcul de $\dfrac{1}{2+3i}$ à l'aide de la quantité conjuguée.

On a, en multipliant au numérateur et au dénominateur par la quantité conjuguée et en utilisant la remarque précédente :

$$\frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2-3i}{2^2+3^2} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$$

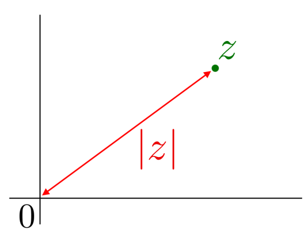
Exercice 5. Soit $t \in \mathbb{R}$. Justifier que les complexes suivants sont définis et déterminer leur forme algébrique :

$$z_1 = \frac{1}{1+i} \qquad z_2 = \frac{i}{3t+4i} \qquad z_3 = \frac{i+5t}{it-1}$$

Exercice 6. Que vaut $\dfrac{1}{i}$?

5 Module

Définition 5 (Module)**.** *Soit* $z \in \mathbb{C}$*, on appelle* ***module*** *de* z *la distance dans le plan entre* z *et* 0*. Cette distance est notée* $|z|$.



Remarques.

1. *Le module d'un nombre réel est égal à sa valeur absolue. Le module est donc une extension aux nombres complexes de la notion de valeur absolue sur les nombres réels.*

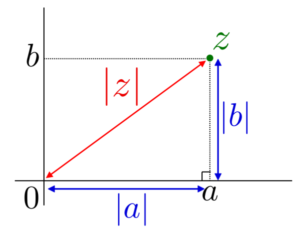
2. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $-z$ *et* z *sont symétriques par rapport à l'origine, donc ils sont à la même distance de l'origine, d'où :* $|-z| = |z|$.

3. $|0| = 0$ *et* 0 *est le seul complexe dont le module vaut* 0*, puisque tous les autres complexes sont à une distance strictement positive de l'origine.*

Théorème 6.
Si $z = a + ib$ avec a et b des réels, alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, par le théorème de Pythagore.

Démonstration. Le théorème de Pythagore donne :

$$|z|^2 = |a|^2 + |b|^2$$



Or, $|a|^2 = a^2$ car $|a| = \pm a$, et de même pour $|b|^2$.
On a alors $|z|^2 = a^2 + b^2$. Enfin, il s'agit d'une égalité entre nombres positifs, donc on peut appliquer la racine carrée, ce qui donne :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

□

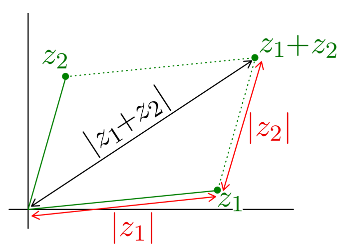
Exemple: On a $|3 + 2i| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.

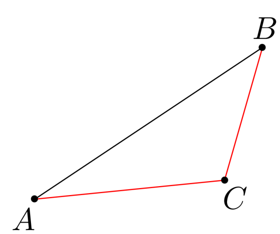
! En général $|z_1 + z_2| \neq |z_1| + |z_2|$.

Théorème 7.
Pour tous $z_1, z_1 \in \mathbb{C}$, on a l'inégalité suivante, appelée **inégalité triangulaire** :

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

Il s'agit d'une traduction dans les complexes de l'inégalité triangulaire bien connue en géométrie plane, qui stipule que dans un triangle ABC, la longueur d'un des côtés est toujours inférieure à la somme des deux autres.





Théorème 8.
Le module est une fonction multiplicative. Autrement dit, pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2|.$$

Démonstration. On écrit $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$, on a alors

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1),$$

donc

$$\begin{aligned}
|z_1z_2|^2 &= (a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2 \\
&= a_1^2a_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + b_1^2b_2^2 + a_1^2b_2^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2 \\
&= a_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 \\
&= (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \\
&= |z_1|^2\,|z_2|^2
\end{aligned}$$

□

Proposition 9. *Le module étant multiplicatif, il a de bonnes propriétés pour tout ce qui concerne le produit : les puissances, l'inverse, et le quotient.*

- *Pour tous* $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, $|z_1z_2\dots z_n| = |z_1|\dots|z_n|$.
- *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$.
- *Pour tout* $z \in \mathbb{C}^\star$, $|z| \neq 0$ *et* $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.
- *Pour tous* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *tels que* $z_2 \neq 0$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Démonstration. Le premier point se démontre par récurrence en utilisant la propriété précédente.

Le deuxième point est un cas particulier de la première propriété.

Démontrons la troisième propriété. Soit donc $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$. On sait, par définition de l'inverse, que $z \times \frac{1}{z} = 1$. Par multiplicativité du module, on en déduit que

$$\left|z \times \frac{1}{z}\right| = |1|, \quad \text{donc:} \quad |z| \times \left|\frac{1}{z}\right| = 1, \quad \text{donc:} \quad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$

Enfin, la quatrième propriété se déduit de la proposition précédente et du troisième point démontré ci-dessus :

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|z_1 \times \frac{1}{z_2}\right| = |z_1| \times \left|\frac{1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

□

Exemple : calcul du module de $z = \dfrac{-5(2-i)}{(4+3i)^2}$.

Par produit et quotient,

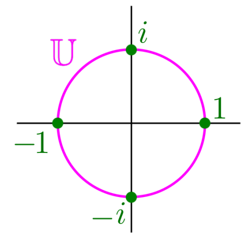
$$\left|\frac{-5(2-i)}{(4+3i)^2}\right| = \frac{|-5||2-i|}{|4+3i|^2} = \frac{5 \times \sqrt{5}}{\sqrt{25}^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Exercice 7. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer le module des complexes suivants.

$$z_1 = 3 + i \qquad z_2 = i - 5x \qquad z_3 = (1+i)(2+3i)$$

$$z_4 = ix(3-i) \qquad z_5 = \frac{-2i(i-1)^4}{5+2xi} \qquad z_6 = \frac{(1+ix)ix}{3i(x+1)^2}, \quad (x \neq -1)$$

6 Exponentielle complexe



On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| = 1\}.$$

Il s'agit du cercle trigonométrique.

Remarque fondamentale

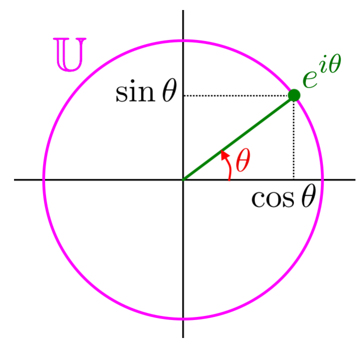
Soit $z \in \mathbb{U}$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

N'importe quel angle orienté θ allant de l'axe des abscisses au segment $[0, z]$ convient comme valeur de θ pour avoir l'égalité (positif, négatif, déphasé d'un multiple de 2π dans un sens ou dans l'autre, etc.).

Il s'agit là d'un théorème de trigonométrie vu en classe de première, mais qui peut être aisément retrouvé à l'aide de géométrie du collège dans les triangles rectangles.

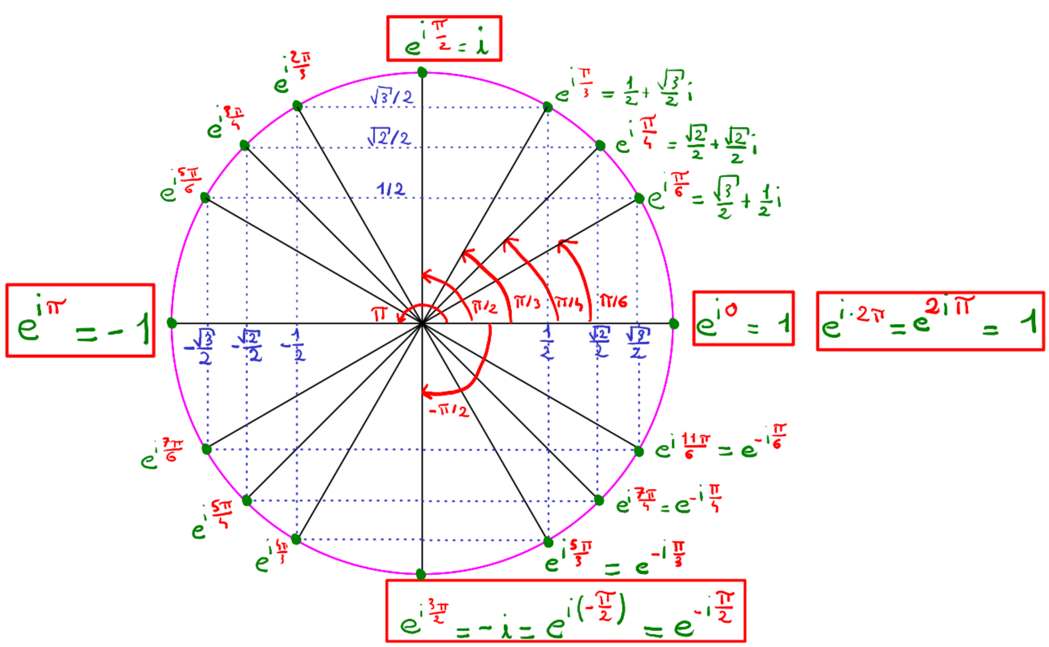
Définition 6 (Exponentielle complexe)**.** *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note*

$$e^{i\theta} := \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$



Remarques.

1. *Rien à voir avec l'exponentielle réelle !*
2. *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\left|e^{i\theta}\right| = 1$, puisque par définition, $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$ (c'est un point du cercle).*
3. $\mathbb{U} = \{e^{i\theta},$ *où* $\theta \in \mathbb{R}\} = \{e^{i\theta},$ *où* $\theta \in [0, 2\pi[\}$.



Proposition 10. *Par sa définition et son interprétation comme un point du cercle trigonométrique, l'exponentielle complexe vérifie les propriétés suivantes :*

- *Pour tout* $k \in \mathbb{Z}$, $e^{2ik\pi} = 1$.
- *La fonction :* $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ \theta & \longmapsto & e^{i\theta} \end{array} \right.$ *est* 2π*-périodique.*
- *Pour tous* $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} e^{i\theta} = e^{i\varphi} &\iff \text{"}\theta \textit{ et } \varphi \textit{ sont égaux modulo } 2\pi\text{"} \\ &\iff \textit{ il existe } k \in \mathbb{Z} \textit{ tel que } \theta = \varphi + 2k\pi \end{aligned}$$

Théorème 11.

L'exponentielle complexe "transforme les produits en somme".
Autrement dit, pour tous $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^{i\theta} \times e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$$

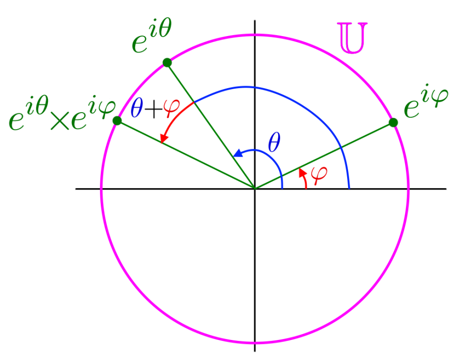
Démonstration. Soit $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$. On écrit :

$$\begin{aligned} e^{i\theta} \times e^{i\varphi} &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \\ &= \underbrace{\cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi)}_{=\cos(\theta+\varphi)} + i\underbrace{(\cos(\theta)\sin(\varphi) + \sin(\theta)\cos(\varphi))}_{=\sin(\theta+\varphi)} \\ &= \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi) \\ &= e^{i(\theta+\varphi)} \end{aligned}$$

□

Remarques.

1. *Comme pour l'exponentielle réelle !*
2. $\mathbb{U}$ *est stable par produit, c'est-à-dire que le produit de deux éléments de* $\mathbb{U}$ *reste dans* $\mathbb{U}$: $e^{i\theta} \times e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)} \in \mathbb{U}$. *De plus, cette formule nous dit comment construire géométriquement ce produit : en additionnant les angles.*

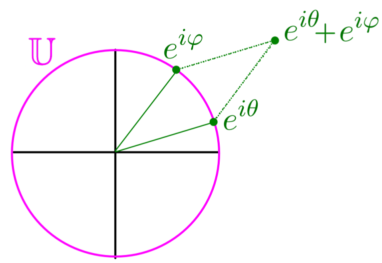


3. *La multiplication dans* $\mathbb{U}$ *fait "tourner" les points : multiplier par* $e^{i\theta}$ *revient à opérer une rotation d'angle* θ.

Proposition 12.

1. *Pour tous* $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} \dots e^{i\theta_n} = e^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}$ *(simple récurrence)*
2. *Pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ *(cas particulier de la situation précédente).*
3. *Pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ *(car* $e^{i\theta} \times e^{-i\theta} = e^{i0} = 1$*).*
4. *Pour tous* $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$, $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\varphi}} = e^{i(\theta-\varphi)}$ *(car* $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\varphi}} = e^{i\theta} \times \dfrac{1}{e^{i\varphi}} = e^{i\theta} \times e^{-i\varphi} = e^{i(\theta-\varphi)}$*).*

⚠ L'ensemble $\mathbb{U}$ n'est **pas** stable par addition.



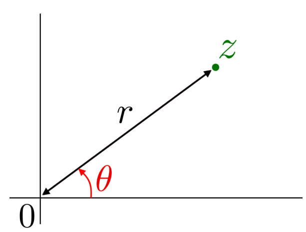
7 Forme trigonométrique (définition)

Théorème 13.

1. Tout $z \in \mathbb{C}$ admet une forme trigonométrique, c'est-à-dire une forme du type

$$z = re^{i\theta}, \quad \text{où} \quad r = |z| \in \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

On dit que θ est un **argument** de z.



2. Pour tous les complexes **non nuls**, cette forme peut être qualifiée d'**unique** au sens où pour tous $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+^\star$, $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$,

$$r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2} \iff \begin{cases} r_1 = r_2 \qquad \text{(identification des modules)} \\ \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \qquad \text{(“identif. des arguments”)} \end{cases}$$

Démonstration. Pour l'existence : il suffit de remarquer que $u = \dfrac{z}{|z|}$ est de module 1. En effet,

$$\left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{||z||} = \frac{|z|}{|z|} = 1$$

(on a bien $||z|| = 1$ car $|z|$ est un nombre réel positif).

D'après la section précédente, on sait qu'il existe un réel θ tel que $u = e^{i\theta}$. On a donc $\dfrac{z}{|z|} = e^{i\theta}$. En posant $r = |z|$, on obtient $z = re^{i\theta}$.

Pour l'unicité : si $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'}$ alors $|re^{i\theta}| = |r'e^{i\theta'}|$, et donc $|r||e^{i\theta}| = |r'||e^{i\theta'}|$.

Comme tout nombre complexe de la forme $e^{i\theta}$ est de module 1, et que r et r' sont deux réels positifs, l'égalité donne $r = r'$.

En simplifiant par r (qui est non nul) dans l'égalité $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'}$, on obtient l'égalité $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ qui implique l'égalité des angles, à un multiple de 2π près.

Réciproquement, si $r = r'$ et $\theta = \theta' + 2k\pi$, on a, bien sûr, $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'}$. □

Exemple : forme trigonométrique de $2i$:

$$i = 0 + 1.i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Cela peut en réalité se voir en plaçant $2i$ dans le plan complexe et en lisant directement sur le dessin son module et un argument convenable.

Exercice 8. Uniquement par lecture sur un dessin, donner la forme trigonométrique de $-3i$, -5, $1+i$, $1-i$.

Exemples : formes trigonométriques de $\sqrt{3}+i$ et de $1+2i$ en factorisant par le module.

On commence par forcer la factorisation par le module. On sait alors que dans la partie entre parenthèse, on obtient un complexe de module 1, donc un complexe de type $e^{i\theta}$. La question est alors de pouvoir reconnaître, ou pas, le cosinus et le sinus d'un angle connu.

- Le module de $\sqrt{3}+i$ est : $\sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$. On a alors :

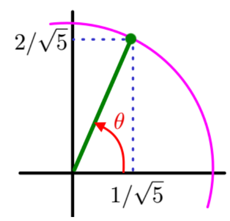
  $$\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

  Ainsi, la forme trigonométrique de $\sqrt{3}+i$ est $2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

- De même, le module de $1+2i$ est $\sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$. On a alors :

  $$1+2i = \sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + i\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \sqrt{5}e^{i\theta}$$

  où θ est LE réel de $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que : $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(\theta) = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$

  La valeur exacte de ce θ n'est pas particulièrement connue. Pour information, elle vaut approximativement 1,107 radians.

Exercice 9. Déterminer la forme trigonométrique la plus explicite possible de :

$$z_1 = \frac{1}{2}i - \frac{1}{2} \qquad\qquad z_2 = 3 - 2i \qquad\qquad z_3 = \frac{-1}{\sqrt{3}} - i.$$

8 Forme trigonométrique (opérations)

Soit $z = re^{i\theta}$, $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$ trois nombres complexes écrits sous forme trigonométrique.

En utilisant les propriétés déjà connues de l'exponentielle complexe, on a (quasiment) immédiatement les propriétés suivantes :

Proposition 14.

1. ***Produit.*** *$z_1z_2 = (r_1e^{i\theta_1})(r_2e^{i\theta_2}) = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.*

   On comprend alors que multiplier dans $\mathbb{C}$ par un complexe z s'interpète très bien si z est sous la forme $re^{i\theta}$ comme l'application de deux transformations géométriques (peu importe l'ordre dans lequel on les applique) :

   - *une rotation d'angle θ (traduisant $\times e^{i\theta}$ dans la formule)*
   - *une homothétie de rapport r (traduisant $\times r$ dans la formule), qui opère une contraction de l'espace si $r \leqslant 1$ et une dilatation de l'espace si $r \geqslant 1$.*

2. ***Puissances.*** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $z^n = r^ne^{in\theta}$.*

3. ***Inverse.*** *Si $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$.*

4. ***Quotient.*** *Si $z_2 \neq 0$, $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.*

5. ***Puissances négatives.*** *Si $z \neq 0$, soit $k \in \mathbb{N}^\star$. $z^{-k} := \dfrac{1}{z^k} = r^{-k}e^{-ik\theta}$.*

Démonstration.

1. Il s'agit de la simple commutativité du produit dans $\mathbb{C}$ et de la propriété de l'exponentielle complexe démontrée précédemment:

$$z_1z_2 = r_1e^{i\theta_1}r_2e^{i\theta_2} = r_1r_2e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

2. Il s'agit de la propriété précédente, appliquée par récurrence au même nombre complexe z.

3. Soit $z := re^{i\theta}$, $z \neq 0$. On a, par une propriété de l'exponentielle complexe démontrée précédemment,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r} \times \frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

4. Idem que précédemment : les propriétés utilisées sur l'exponentielle ont été démontrées. Soit $z_1 := r_1e^{i\theta_1}$ et $z_2 := r_2e^{i\theta_2}$. On a :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i\theta_1} \times \frac{1}{e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i\theta_1}e^{-i\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

5. Soit $z := re^{i\theta}$, et soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$z^{-k} := \frac{1}{z^k} = \frac{1}{(re^{i\theta})^k} = \frac{1}{r^k} \times \frac{1}{e^{ik\theta}} = r^{-k}e^{-ik\theta}$$

$\square$

Remarque. *On remarque que, dans le cas où z est non nul, la relation $z^n = r^n e^{in\theta}$ est valable pour $n \in \mathbb{Z}$. Le cas particulier où $r = 1$ donne :*

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{Z}, \quad \text{pour tout } \theta \in \mathbb{R} : \quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

Cette formule est célèbre, et s'appelle la formule de Moivre.

⚠ Une écriture du type $z^{3,27}$, avec un exposant non entier, n'a pas de sens en général dans les complexes. Dans un autre chapitre, on verra que l'on peut donner du sens à de telles écritures uniquement dans le cas particulier où z est un réel strictement positif, et que tout cela n'a rien à voir avec les complexes.

Remarque. *La forme trigonométrique est inadaptée pour faire des sommes. Il n'existe pas de façon simple de réaliser l'opération : $r_1e^{i\theta_1} + r_2e^{i\theta_2}$. En pratique, on revient souvent à la forme algébrique.*

Exercice 10. Déterminer la forme algébrique de $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

9 Équations dans $\mathbb{C}$

Les équations d'inconnue z complexe peuvent être traitées en cherchant z:

- sous forme algébrique : $z = a + ib$, et les inconnues deviennent $a, b \in \mathbb{R}$;
- sous forme trigonométrique : $z = re^{i\theta}$, et les inconnues deviennent $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$;
- ni l'un ni l'autre : en gardant z comme inconnue.

Ces trois méthodes ne sont pas les seules, mais elles sont très classiques.

Exercice 11. Résoudre l'équation $z + i = 1 - 3iz$.

Exercice 12. Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que $2z + |z|^2 = 1 + 2i$.

Exercice 13. Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^3 = 8i$.

10 Conjugaison

Définition 7 (Conjugué)**.** *Soit $z \in \mathbb{C}$.*

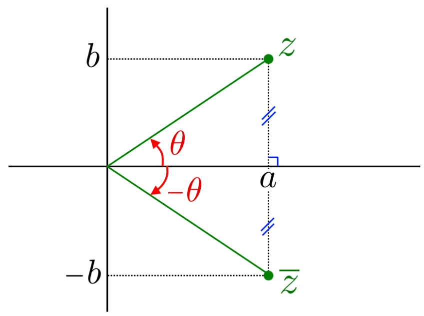
*Si $z = a + ib$ (où $a, b \in \mathbb{R}$), alors le **conjugué** de z est le complexe noté $\bar{z}$ qui vaut*

$$\bar{z} := a - ib.$$

Si z est écrit sous forme trigonométrique $z = re^{i\theta}$ (où $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$), alors

$$\bar{z} = re^{-i\theta}.$$

Dans le plan complexe, z et $\bar{z}$ sont symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe des abscisses.



Démonstration. Démontrons la seconde formule. Soit $z = re^{i\theta}$. On a alors, en utilisant la partité de cosinus et l'imparité de sinus :

$$\overline{z} = \overline{r\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)} = r\left(\cos(\theta) - i\sin(\theta)\right) = r\left(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right) = re^{-i\theta}$$

□

Proposition 15. *Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:*

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
3. $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$
4. *Si* $z_2 \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
5. *Pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ et cela reste vrai pour $n \in \mathbb{Z}$ si z est non nul.*

Démonstration. Démonstration du 1 : mieux vaut utiliser les formes algébriques $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ pour les sommes/différences :

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 + z_2} &= \overline{a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2} \\
&= \overline{(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)} \\
&= (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2) \\
&= (a_1 - ib_1) + (a_2 - ib_2) \\
&= \bar{z}_1 + \bar{z}_2
\end{aligned}$$

La démonstration du 2 est similaire à ce qui précède.
Démonstration du 3: on utilise ici les formes trigonométriques $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ pour les produits/quotients :

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2}} \\
&= \overline{r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}} \\
&= r_1 r_2 e^{-i(\theta_1+\theta_2)} \\
&= r_1 e^{-i\theta_1} r_2 e^{-i\theta_2} \\
&= \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2
\end{aligned}$$

Démontrons enfin le 4. Supposons donc $z_2 \neq 0$. On écrit également $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, avec $r_2 \neq 0$ puisque $z_2 \neq 0$. On a alors, en utilisant les propriéés de l'exponentielle complexe :

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}}\right)} = \overline{\left(\frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}\right)} = \frac{r_1}{r_2} e^{-i(\theta_1-\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} e^{-i\theta_1} e^{i\theta_2} = \frac{r_1 e^{-i\theta_1}}{r_2 e^{-i\theta_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

□

Remarque. *Pour tout ce qui concerne les opérations algébriques, prendre le conjugué consiste en pratique à remplacer i par $-i$ dans toute l'expression.*

Exemple : le conjugué de $\dfrac{(2+4i)^3}{ie^{\frac{i\pi}{5}}-1}$ vaut $\dfrac{(2-4i)^3}{-ie^{\frac{-i\pi}{5}}-1}$.

Proposition 16. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$,*

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $|\overline{z}| = |z|$
- $z\overline{z} = |z|^2$, *ce qui dans le cas où $z \neq 0$, nous fait retrouver le fait que* $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$
- $z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z$
- $z \in i\mathbb{R} \iff \bar{z} = -z$
- $\mathcal{R}e(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$
- $\mathcal{I}m(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

Démonstration.

- Soit $z := re^{i\theta} \in \mathbb{C}$. On a :
$$\overline{\overline{z}} = \overline{re^{-i\theta}} = re^{i\theta} = z$$
- Soit $z := a + ib \in \mathbb{C}$. On a :
$$|\overline{z}|^2 = |a - ib|^2 = a^2 + (-b)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$
Les deux quantités étant positives, on en déduit $|\overline{z}| = |z|$.
- Soit $z := a + ib \in \mathbb{C}$. On a :
$$z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$$
On en déduit, si $z \neq 0$:
$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

- Soit $z := a + ib \in \mathbb{C}$. On a les équivalences :

$$z \in \mathbb{R} \iff b = 0 \iff z = a = \overline{z}$$

- De même pour $z \in i\mathbb{R}$.
- Soit $z := a + ib \in \mathbb{C}$. On a :

$$z + \overline{z} = a + ib + a - ib = 2a$$

  D'où la formule $\mathcal{R}e(z) = a = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$.
- De même pour $\mathcal{I}m(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.

$\square$

Cas particulier des derniers points : si $z = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ pour un $\theta \in \mathbb{R}$, on obtient ce que l'on appelle les *formules d'Euler* :

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}} \qquad \boxed{\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

Ces formules permettent d'exprimer un cos ou un sin à l'aide d'exponentielles complexes et sont donc très utiles pour de nombreux calculs en trigonométrie.

Exercice 14. La symétrie par rapport à l'axe des abscisses est donnée par $z \mapsto \bar{z}$. Comment décrire avec une telle fonction la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées ? et la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$?

11 Équation du second degré (coefficients réels)

Le but de cette partie est de résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Les coefficients a, b et c sont toujours supposés réels.

Théorème 17.
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $P(z) = az^2 + bz + c$. On note $\Delta := b^2 - 4ac \in \mathbb{R}$.

- Si $\Delta \geqslant 0$, alors P admet une forme factorisée :

$$P(z) = a(z - \alpha)(z - \beta) \qquad \text{où :} \quad \begin{cases} \alpha & := & \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \in \mathbb{R} \\ \beta & := & \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

  Les réels α et β sont les racines de P, càd les solutions de $P(z) = 0$.

  Cas particulier: si $\Delta = 0$, alors $\alpha = \beta$ et $P(z) = a(z - \alpha)^2$.

- Si $\Delta < 0$, alors P admet aussi une forme factorisée :

$$P(z) = a(z - \alpha)(z - \overline{\alpha}) \qquad \text{où} \quad \alpha := \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}.$$

  Le polynôme P a alors deux racines complexes (non réelles) conjuguées α et $\overline{\alpha}$.

Démonstration. On cherche à transformer l'expression az^2+bz+c en faisant apparaître z dans un unique carré pour se ramener au cas de la recherche d'une racine carrée. On peut procéder ainsi en «forçant» l'utilisation d'une identité remarquable :

$$\begin{aligned}
az^2+bz+c =& a\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right)\\
=& a\left(\left(z+\underbrace{\frac{b}{2a}}_{\text{pour le double produit}}\right)^2-\underbrace{\frac{b^2}{4a^2}}_{\text{pour compenser}}+\frac{c}{a}\right) \qquad \text{"forme canonique"}\\
=& a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\\
=& a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{(2a)^2}\right)
\end{aligned}$$

Supposons que Δ puisse être écrit comme un carré, càd qu'il existe $\delta\in\mathbb{C}$ tel que $\delta^2=\Delta$. On verra en fin de démonstration pourquoi cette forme est toujours posssible. En utilisant l'identité remarquable $X^2-Y^2=(X-Y)(X+Y)$, on obtient la forme factorisée du trinôme :

$$az^2+bz+c=a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right)=a\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right)$$

Cette forme factorisée livre alors la solution, car on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
az^2+bz+c=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}=0 \quad \text{ou} \quad z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}=0\\
&\Longleftrightarrow \quad z=\frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{ou} \quad z=\frac{-b-\delta}{2a}
\end{aligned}$$

Reste à trouver comment écrire Δ comme un carré. On peut déjà remarquer que Δ est un réel, car a, b et c sont des réels par hypothèse.

- Si $\Delta\geqslant 0$: alors $\delta:=\sqrt{\Delta}$ convient pour vérifier $\delta^2=\Delta$.
  On remarque que dans le cas particulier où $\Delta=0$, δ vaut lui-même 0, et dans ce cas, les deux racines sont égales et valent $-\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta<0$: on remarque que le nombre complexe $\delta:=i\sqrt{|\Delta|}$ vérifie bien $\delta^2=\Delta$ car :

$$\delta^2=\left(i\sqrt{|\Delta|}\right)^2=i^2\sqrt{|\Delta|}^2=-|\Delta|=-(-\Delta)=\Delta$$

Dans tous les cas, les valeurs de δ donnent exactement les valeurs de α et β données dans le théorème.

$\square$

Exercice 15. Déterminer les $z\in\mathbb{C}$ tels que $z^2-6z+10=0$.

12 Utilité des complexes (voir vidéo)