Devoir surveillé n° 1 – partie 2
mathématiques
MP
vendredi 5 septembre 2025
durée 3h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

On définit, pour tout $n \geqslant 2$, la fonction f_n par

$$f_n : \left| \begin{array}{lcl} [-2, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - n\ln(1 + \frac{x}{n+1}) \end{array} \right.$$

1. Rappeler le développement limité à l'ordre 3 de $\ln(1 + u)$ au voisinage de 0.
2. Soit $n \geqslant 2$.
   (a) Montrer que f_n est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-2, +\infty[$.
   (b) Étudier les variations de f_n et dresser son tableau de variations en précisant les limites aux bornes.
   (c) Déterminer le signe de $f_n(-1)$.
3. Soit $x \geqslant -2$. On définit la fonction

$$h_x : \left| \begin{array}{lcl}]1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & x - t\ln(1 - \frac{2}{t+1}) \end{array} \right.$$

   (a) Calculer $h'_x(t)$ et $h''_x(t)$. Montrer que h_x est strictement positive sur $]1, +\infty[$.
   (b) En déduire, pour tout entier $n \geqslant 2$, le signe de $f_n(-2)$.
4. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, il existe un unique réel $x_n \in]-2, -1[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
5. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers -2.
6. On pose $w_n = x_n + 2$. Trouver un équivalent de w_n. *Indication* : on pourra commencer par donner un développement à 3 termes de $\ln(1 + \dfrac{x_n}{n+1})$.

   Quel est le développement asymptotique qui en résulte pour x_n ?

Exercice 2

On rappelle que $\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour n entier naturel, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On précise que l'on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.
Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note $P^{(n)}$ sa dérivée n-ième.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = (X^2-1)^n$ et $L_n = \dfrac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}$.

Les polynômes L_n sont appelés *polynômes de Legendre.* Pour n entier naturel, a_n désigne le coefficient dominant de L_n.

1. Déterminer L_0, L_1 et vérifier que $L_2 = \dfrac{1}{2}(3X^2-1)$.

Dans la suite de cette partie, n désigne un entier naturel.

2. Justifier que L_n est de degré n et préciser la valeur de a_n.
3. Montrer que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de U_n, en précisant leur ordre de multiplicité, puis justifier qu'il existe un réel $\alpha \in]-1,1[$ et un réel λ, qu'on déterminera, tels que :
$$U_n' = \lambda (X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha)$$
5. Dans cette question seulement, $n \geqslant 2$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose qu'il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel μ tels que :
$$U_n^{(k)} = \mu (X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k)$$
Justifier qu'il existe des réels $\beta_1, \dots, \beta_{k+1}$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel ν tels que :
$$U_n^{(k+1)} = \nu (X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1})$$
On pourra utiliser le théorème de Rolle.
6. En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, L_n admet n racines réelles simples, toutes dans $[-1,1]$. Quelle factorisation en déduit-on pour L_n ?

Exercice 3

$\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombre complexes, $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels et n est un entier naturel, $n \geqslant 2$. Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des éléments de $\mathbb{C}$ **non tous nuls** et P le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ défini par
$$P = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n$$

Dans tout cet exercice, z désigne une racine dans $\mathbb{C}$ de P.
Le but de l'exercice est d'établir par deux méthodes différentes une majoration de $|z|$ en fonction des coefficients de P. Les deux parties qui suivent sont indépendantes.

Partie A
Utilisation de méthodes algébriques

On note E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$. I_n est la matrice identité de E.
On note F le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des matrices à n lignes et une colonne et à coefficients dans $\mathbb{C}$. Pour X élément de F, on note x_i l'élément de la i-ème ligne de X.
Pour M élément de E, $m_{i,j}$ est le coefficient de M situé dans la i-ème ligne et la j-ème colonne de M.

1. Soit M une matrice de E. On suppose que M n'est pas inversible.
   (a) Montrer qu'il existe X élément de F tel que $MX = 0$ et $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k| = 1$.
   (b) En déduire qu'il existe i élément de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $|m_{i,i}| \leqslant \sum\limits_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} |m_{i,j}|$.
2. Soit N la matrice de E définie par

$$n_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \ j = i-1 \\ -a_{n+1-i} & \text{si } j = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Par exemple, pour $n = 4$, $\quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_4 \\ 1 & 0 & 0 & -a_3 \\ 0 & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$.
   Démontrer que, si λ est un élément quelconque de $\mathbb{C}$, $\det(N - \lambda I_n) = (-1)^n P(\lambda)$.
3. Déduire des deux questions précédentes que $|z| \leqslant 1 + \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |a_k|$.

Partie B
Utilisation de méthodes analytiques

Soit Q le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $Q = X^n - |a_1|X^{n-1} - \ldots - |a_{n-1}|X - |a_n|$.

4. Soit g l'application de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ telle que

$$g(t) = 1 - \frac{|a_1|}{t} - \ldots - \frac{|a_{n-1}|}{t^{n-1}} - \frac{|a_n|}{t^n}$$

   (a) Montrer que g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
   (b) Prouver que Q admet une unique racine dans $]0, +\infty[$; elle sera notée t_0.
5. Soit α élément de $]0, +\infty[$ tel que $Q(\alpha) \geqslant 0$. Étudier le signe de $Q(|z|)$. En déduire que

$$|z| \leqslant t_0 \leqslant \alpha$$

6. En appliquant le résultat de la question précédente pour une valeur de α judicieusement choisie, retrouver l'inégalité à la question 3 de la partie A et prouver qu'elle est stricte.
