

# Séries numériques

## Les attentes



1. Maîtriser le vocabulaire : somme totale, sommes partielles, reste ; séries convergentes, divergentes.
2. Connaître les séries de référence et savoir les utiliser dans les théorèmes d'équivalence, comparaison, négligeabilité.
3. Technique et théorème de télescopage.
4. Calcul de sommes par décomposition en éléments simples.
5. Règle de d'Alembert.
6. Critère spécial des séries alternées.
7. Théorème de Cesàro.
8. Savoir mettre en œuvre une technique de comparaison série-intégrale !



1. Sommation des relations de comparaison ( $\sim, O, o$ ) : maîtriser les différents cas de figure.
2. Exemple : utiliser le point précédent pour démontrer le théorème de Cesàro.

## 1 Révisions sur les séries numériques

### Définition 1

On considère une suite réelle  $(u_n)_{n \geq n_0}$ . On peut lui associer la suite de ses sommes partielles  $(S_n)_{n \geq n_0}$ , définie par :

$$S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k \quad \text{le plus souvent } S_n = \sum_{k=0}^n u_k \quad \text{ou} \quad S_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

De quelle *nature* est la série ?

- si la suite  $(S_n)$  diverge, on dit que la série  $\sum u_k$  diverge ;
- si la suite  $(S_n)$  converge, on dit que la série  $\sum u_k$  converge.

Dans le cas où la série  $\sum u_k$  converge, la limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n_0}^n u_k$  est appelée *somme de la série* et est

notée  $\sum_{k=n_0}^{\infty} u_k$ . On définit la suite  $(R_n)_{n \geq n_0}$  des restes de la série par :

$$R_n = \sum_{k=n_0}^{\infty} u_k - \sum_{k=n_0}^n u_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

Le *reste de rang  $n$  de la série* est ce qu'il reste à sommer quand on n'a sommé que jusqu'au rang  $n$ . Par propriété, quand la série converge, le reste tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Deux séries sont dites *de même nature* si elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux

divergentes. Changer les premiers termes de la série ne modifie pas sa nature.

## 1.1 propriétés pour des séries qui sont convergentes

### Propriété 1 – linéarité

Soient deux séries de terme général  $u_k$  et  $v_k$  convergentes, et  $\lambda$  et  $\mu$  réels.

Toute combinaison linéaire de séries convergentes est convergente :  $\sum(\lambda u_k + \mu v_k)$  converge.

On a :

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} u_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} v_k$$

On peut généraliser à une combinaison linéaire de séries comportant plus de deux séries.

### Propriété 2 – positivité et stricte positivité de la somme d'une série convergente

Soit  $\sum u_k$  une série **convergente**.

— Si pour tout  $k$ , on a  $u_k \geq 0$ , alors  $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \geq 0$ .

— Si pour tout  $k$ , on a  $u_k > 0$ , alors  $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k > 0$ .

— Si pour tout  $k$ ,  $u_k \geq 0$  et  $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 0$ , alors : pour tout  $k$ ,  $u_k = 0$ .

### Propriété 3 – croissance de la somme pour des séries convergentes

Soient  $\sum u_k$  et  $\sum w_k$  deux séries **convergentes** telles que pour tout  $k$ ,  $u_k \leq w_k$ . On a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} w_k$$

### Définition - propriété 1 – convergence absolue

La série  $\sum u_k$  converge absolument lorsque  $\sum |u_k|$  converge.

Si une série converge absolument, alors cette série converge, et on a l'inégalité triangulaire :

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$$

Une série peut être convergente sans être absolument convergente.

C'est le cas de la série de terme général  $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$  par exemple.

## 1.2 séries de référence

### Propriété 4 – séries de Riemann

La série  $\sum \frac{1}{k^\alpha}$  converge si, et seulement si,  $\alpha > 1$

### Propriété 5 – séries géométriques

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . La série de terme général  $z^k$  est appelée série géométrique (de raison  $z$ ). Elle converge si, et seulement si,  $|z| < 1$  et dans ce cas, la somme de la série est :

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \quad \sum_{k=d}^{+\infty} z^k = z^d \times \frac{1}{1-z} = (\text{premier terme}) \times \frac{1}{1-\text{raison}}$$

### Propriété 6 – série exponentielle

Pour tout complexe  $z$ , la série de terme général  $\frac{z^n}{n!}$  converge et on a :  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$ .

Exercice 1 : Calculer  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{k!}$ .

## 1.3 comment utiliser les séries de référence pour étudier la nature d'une série ?

### Propriété 7 – théorèmes de comparaison

#### • Théorème de majoration-minoration

On suppose que  $0 \leq a_n \leq b_n$ .

- si la série de terme général  $a_n$  diverge alors la série de terme général  $b_n$  diverge ;
- si la série de terme général  $b_n$  converge, alors la série de terme général  $a_n$  converge.

#### • Règle de domination

On suppose que  $b_n$  est positif et que  $a_n = O(b_n)$ .

Si la série de terme général  $b_n$  converge, alors la série de terme général  $a_n$  converge.

#### • Règle de négligeabilité

On suppose que  $b_n$  est positif et que  $a_n = o(b_n)$ .

Si la série de terme général  $b_n$  converge, alors la série de terme général  $a_n$  converge.

#### • Critère d'équivalence

On suppose que  $b_n$  est positif et que  $a_n \sim b_n$ .

La série de terme général  $a_n$  et la série de terme général  $b_n$  sont de même nature.

Exercice 2 :

Étudier la nature des séries de terme général suivant.

1.  $a_n = \frac{\ln n}{n}$

2.  $b_n = \frac{\cos n + \sin n}{2^n}$

3.  $c_n = \ln \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)$

4.  $d_n = \frac{(\ln n)^3}{n^2}$

5.  $e_n = n^5 e^{-n}$

6.  $f_n = \frac{\ln(\ln n)}{n\sqrt{n}}$

## 1.4 liens suite-série

### Propriété 8 – divergence grossière

Si la série  $\sum u_k$  converge, alors son terme général tend vers 0.

Par contraposée, si  $u_n$  ne tend pas vers 0, alors la série  $\sum u_k$  diverge. On parle dans ce cas de *divergence grossière*.

### Propriété 9 – théorème du télescopage

La **suite**  $(u_n)$  converge si, et seulement si, la série  $\sum(u_{k+1} - u_k)$  converge.

Démonstration : Par télescopage,  $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0$ . Donc la suite  $(u_n)$  converge si, et seulement si, la suite

$\left(\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)\right)$  converge, si, et seulement si, la série  $\sum(u_{k+1} - u_k)$  converge.

 Exercice 3 : Calculer  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ .

## 1.5 le critère des séries alternées

### Définition 2

On appelle *série alternée* toute série de la forme  $\sum(-1)^n a_n$  où  $(a_n)$  est une suite réelle de signe constant.

La plus connue de ces séries alternées est  $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ .

### Théorème 1 – théorème des séries alternées

Si la suite  $(a_n)$  est décroissante et de limite nulle, alors la série  $\sum(-1)^n a_n$  converge.

On en déduit que  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  converge.

### Théorème 2 – théorème spécial des séries alternées

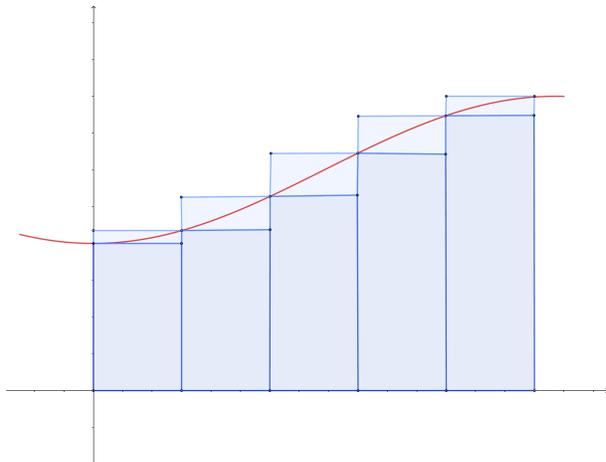
Si la suite  $(a_n)$  est décroissante et de limite nulle, alors la série  $\sum(-1)^n a_n$  converge.

Le premier terme de  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$  est  $(-1)^{n+1} a_{n+1}$  et on a les informations complémentaires :

$$\begin{cases} R_n \text{ est du signe de son premier terme} \\ |R_n| \leq |\text{son premier terme}| \quad \text{à savoir } |R_n| \leq a_{n+1} \end{cases}$$

## 2 Technique de comparaison série-intégrale

Graphiquement, on comprend bien la méthode consistant à encadrer l'intégrale de  $f$  sur un intervalle par une somme d'aires de rectangles (d'où le nom de méthode des rectangles). Voici une situation dans laquelle  $f$  est croissante.



On considère une série  $\sum f(n)$  où  $f$  est une fonction continue et monotone sur  $\mathbb{R}^+$ . On peut comparer les sommes partielles  $S_n = \sum_{k=0}^n f(k)$  à une intégrale pour déterminer la nature de la série. Si, par exemple,  $f$  est croissante, on a pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et  $t \in [k, k+1]$  :

$$f(k) \leq f(t) \leq f(k+1)$$

Puis par croissance de l'intégrale sur  $[k, k+1]$ ,

$$\int_k^{k+1} f(k) dt \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \int_k^{k+1} f(k+1) dt$$

$$f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k+1)$$

Enfin, en sommant l'inégalité de gauche pour  $0 \leq k \leq n$  et celle de droite pour  $0 \leq k \leq n-1$ , on obtient via la relation de Chasles :

$$f(0) + \int_0^n f(t) dt \leq S_n \leq \int_0^{n+1} f(t) dt$$

On a des résultats analogues lorsque  $f$  est décroissante.

Les encadrements obtenus permettent éventuellement de déterminer un équivalent de la suite des sommes partielles.

En modifiant légèrement la technique, on peut également obtenir un équivalent de la suite des restes (en cas de convergence).

Exercice 4 :

1. (*version plus facile*) Étudier la nature de la série  $\sum \frac{1}{n \ln n}$ .
2. (*version plus difficile*) Pour  $\alpha > 0$ , étudier la nature de la série  $\sum \frac{1}{n \ln^\alpha n}$ .

## 3 Règle de d'Alembert pour les séries numériques

### Propriété 10

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ . On suppose que  $u_n \neq 0$  à partir d'un certain rang et que :

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in [0, +\infty[ \cup \{+\infty\}$$

- Si  $\ell < 1$ , la série  $\sum u_n$  converge absolument.
- Si  $\ell > 1$ , la série  $\sum u_n$  diverge grossièrement.
- Si  $\ell = 1$ , on ne peut rien dire, il faut chercher une autre façon d'étudier la série.

Exercice 5 : Étudier les séries de terme général suivant.

1.  $a_n = \frac{n^4}{3^n}$

3.  $c_n = \frac{n!n^n}{(2n)!}$

2.  $b_n = \frac{\ln n}{2^n}$

4. pour  $x$  réel,  $d_n = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

De manière générale, la règle de d'Alembert est particulièrement adaptée aux séries dont le terme général fait apparaître des factorielles et des puissances.

## 4 Sommation des relations de comparaison

### Propriété 11 – référence convergente positive et reste

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum w_n$  deux séries, telles que  $\sum w_n$  est **convergente** et  $w_n \geq 0$ .  
On note respectivement  $R_n(u)$  et  $R_n(w)$  les restes de rang  $n$  de ces séries.

- Si  $u_n \sim w_n$  alors la série  $\sum u_n$  converge et  $R_n(u) \sim R_n(w)$ .
- Si  $u_n = o(w_n)$  alors la série  $\sum u_n$  converge et  $R_n(u) = o(R_n(w))$ .
- Si  $u_n = O(w_n)$  alors la série  $\sum u_n$  converge et  $R_n(u) = O(R_n(w))$ .

La propriété est encore valable si la suite de référence est **de signe constant à partir d'un certain rang**.

### Propriété 12 – référence divergente positive et sommes partielles

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum w_n$  deux séries, telles que  $\sum w_n$  est **divergente** et  $w_n \geq 0$ .  
On note respectivement  $S_n(u)$  et  $S_n(w)$  les sommes partielles de rang  $n$  de ces séries.

- Si  $u_n \sim w_n$  alors la série  $\sum u_n$  diverge et  $S_n(u) \sim S_n(w)$ .
- Si  $u_n = o(w_n)$  alors  $S_n(u) = o(S_n(w))$ .
- Si  $u_n = O(w_n)$  alors  $S_n(u) = O(S_n(w))$ .

La propriété est encore valable si la suite de référence est **de signe constant à partir d'un certain rang**.

 Exercice 6 :

1. Montrer que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n)$ .

2. Donner un équivalent de  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}$ .

Exercice 7 : Montrer que  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$ .

Propriété 13 – théorème de Cesàro

- Soit  $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  une suite convergente, de limite  $\ell$ . On a :

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$$

- Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  une suite divergente de limite  $+\infty$ . On a :

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

## 5 Annexe : quelques éléments de démonstrations

### Règle de d'Alembert en page 5

Le fait d'avoir énoncé avec valeurs absolues ou module permet de se ramener au cas où  $u$  est une suite à termes positifs.

• Si  $\ell > 1$ , à partir d'un certain rang  $p$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ . Comme  $u_n > 0$ , on trouve  $u_{n+1} \geq u_n$ . La suite  $u$  est donc croissante à partir du rang  $p$  et  $u_n \geq u_p$  pour  $n \geq p$ . Mais alors  $u_n$  ne peut pas tendre vers 0 (sinon  $0 \geq u_p > 0$ ), et la série  $\sum u_n$  diverge.

• Si  $\ell < 1$ , alors  $\ell < \frac{\ell+1}{2}$ , et il existe un rang  $p$  à partir duquel  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{\ell+1}{2}$ . Par récurrence, pour  $n \geq p$ ,

$$0 < u_n \leq u_p \left( \frac{\ell+1}{2} \right)^{n-p}$$

Comme  $\frac{\ell+1}{2} \in [0, 1[$ , la série géométrique  $\sum_n u_p \left( \frac{\ell+1}{2} \right)^{n-p}$  converge. Par le théorème de comparaison,  $\sum u_n$  converge.

• Si  $\ell = 1$ , on ne peut rien dire de général, puisqu'avec l'exemple de  $u_n = \frac{1}{n}$ , on a à la fois  $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$  et  $\sum u_n$  diverge, tandis qu'avec l'exemple de  $u_n = \frac{1}{n^2}$ , on a à la fois  $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$  et  $\sum u_n$  converge.

### Théorème des séries alternées en page 4

Soit  $(a_n)$  une suite décroissante de limite nulle. On pose  $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$ . Montrons que les suites  $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes. Elles seront alors convergentes de même limite, et d'après le théorème des suites extraites, la suite  $(S_n)$  convergera.

$$\begin{aligned} S_{2n+1} - S_{2n} &= (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = -a_{2n+1} \rightarrow 0 \\ S_{2(n+1)} - S_{2n} &= (-1)^{2n+1} a_{2n+1} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0 \\ S_{2(n+1+1)} - S_{2n+1} &= a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0 \end{aligned}$$

Tout fonctionne comme prévu. Approfondissons. Notons  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ .

Par croissance de  $(S_{2n+1})$  et décroissance de  $(S_{2n})$ , on a :  $\forall p \in \mathbb{N}, S_{2p+1} \leq S \leq S_{2p}$  (\*).

Remarque : On peut ainsi programmer des valeurs approchées de  $S$  à une précision donnée.

L'encadrement précédent nous donne :

- $S_{2n+1} - S_{2n} \leq S - S_{2n} \leq 0$ , soit  $-a_{2n+1} \leq R_{2n} \leq 0$ .
- Par décroissance de la suite  $(S_{2n})$ , on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S \leq S_{2n+2}$ . On reprend  $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2}$  pour avoir  $0 \leq S - S_{2n+1} \leq S_{2n+2} - S_{2n+1}$ , puis  $0 \leq R_{2n+1} \leq a_{2n+2}$ .

Remarque : dans certains exercices, il nous faut le signe de  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ , qui n'est pas rigoureusement un reste. Mais la propriété précédente s'étend :  $S$  est du signe de  $(-1)^0 a_0$  (positif donc) et  $|S_0| \leq a_0$ . En effet, on a par (\*) :

$$0 \leq a_0 - a_1 = S_1 \leq S \leq S_0 = a_0$$

### Propriété 11

La convergence (absolue) de  $\sum u_n$  a déjà été établie.

- Dans le cas où  $u_n = O(w_n)$ , il existe un réel  $M$  et un entier  $n_0$  tels que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $|u_n| \leq M w_n$ . Pour  $p \geq n_0$ , par inégalité triangulaire en présence de séries absolument convergentes,

$$\left| \sum_{n=p+1}^{\infty} |u_n| \right| \leq \sum_{n=p+1}^{+\infty} |u_n| \leq M \sum_{n=p+1}^{+\infty} w_n$$

donc  $R_n(u) = O(R_n(w))$ .

- Dans le cas où  $u_n = o(w_n)$ , on adapte le raisonnement précédent en remplaçant « il existe  $M$  » par « pour tout  $\varepsilon > 0$  ».
- Dans le cas où  $u_n \sim w_n$ , on utilise  $u_n - w_n = o(w_n)$ .

### Propriété 12

La divergence de  $\sum u_n$  a déjà été établie.

- Dans le cas où  $u_n = O(w_n)$ , il existe un réel  $M$  et un entier  $n_0$  tels que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $|u_n| \leq M w_n$ . Comme  $\sum w_n$  diverge et est à termes positifs, on a :  $(S_n(w))$  est croissante et divergente. Par le théorème de

convergence monotone,  $\lim S_n(w) = +\infty$ . Il existe donc  $n_1 \geq n_0$  tel que pour  $n \geq n_1$ ,  $|S_{n_0}(u)| \leq MS_n(w)$ . Pour  $n \geq n_1$ , on a :

$$\begin{aligned} |S_n(u)| &= \left| S_{n_0}(u) + \sum_{k=n_0+1}^n u_k \right| \\ &\leq |S_{n_0}(u)| + \sum_{k=n_0+1}^n |u_k| \leq MS_n(w) + K \sum_{k=n_0+1}^n w_k \\ &\leq 2KS_n(w) \text{ car les } w_k \text{ sont positifs} \end{aligned}$$

Donc  $S_n(u) = O(S_n(w))$ .

- Dans le cas où  $u_n = o(w_n)$ , on adapte le raisonnement précédent en remplaçant « il existe  $M$  » par « pour tout  $\varepsilon > 0$  ».
- Dans le cas où  $u_n \sim w_n$ , on utilise  $u_n - w_n = o(w_n)$ .

### Propriété 13

Démonstration : Si  $\lim u_n = \ell \in \mathbb{C}$ , alors  $u_n - \ell = o(1)$ . Comme  $\sum 1$  diverge et  $1 \geq 0$ , la propriété de sommation dans le cas divergent donne :

$$\sum_{k=0}^n (u_k - \ell) = o\left(\sum_{k=0}^n 1\right) \text{ soit } \sum_{k=0}^n u_k = (n+1)\ell + o(n) \text{ puis } \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k = \ell + o(1)$$

Et si  $\lim u_n = \infty$ , alors  $1 = o(u_n)$ . Par le même théorème, appliqué avec la référence  $\sum u_n$  qui diverge et qui est à termes positifs à partir d'un certain rang (puisque  $\lim u_n = +\infty$ ), on a

$$\sum_{k=0}^n 1 = o\left(\sum_{k=0}^n u_k\right) \text{ soit } n+1 = o\left(\sum_{k=0}^n u_k\right)$$

On en déduit que  $\lim \frac{n+1}{\sum_{k=0}^n u_k} = 0$ , et comme les termes sont positifs pour  $n$  assez grand,  $\lim \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k = +\infty$ .