Remise en route

Équivalents, développements limités et développements asymptotiques

1 Infiniment grand

Prédominances usuelles sur les suites

Prédominances usuelles sur les fonctions en $+\infty$

Exercice 1 : Les réponses et/ou les rédactions suivantes sont incorrectes. Les corriger.

1. $x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x \quad \text{donc} \quad e^{x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x$.
2. $\dfrac{3n^2+5e^n}{n+e^{-n}} \sim \dfrac{e^n}{n}$
3. $\sin x \underset{0}{\sim} x - \dfrac{x^3}{6}$
4. $\ln x + \sqrt{x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x+1}$
5. $(1+x)^{1/3}-1 \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{3}x \quad \text{et} \quad \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \quad \text{donc} \quad (1+x)^{1/3}-1+\ln(1+x) \underset{0}{\sim} \dfrac{4}{3}x$.

2 Développements limités

Au voisinage de a

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $a \in \mathbb{R}$.
L'équation de la tangente à C_f en a est :

$$y =$$

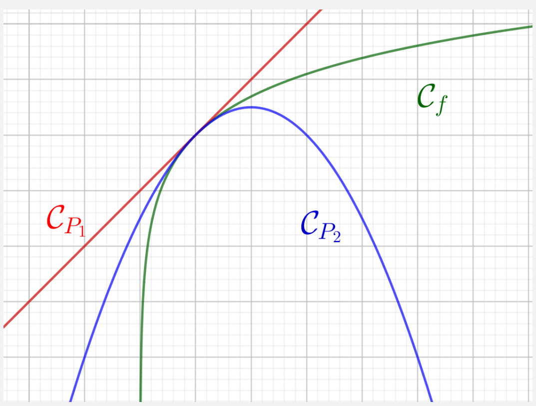
Les développements limités de f en a à l'ordre 0, puis à l'ordre 1, à l'ordre 2, à l'ordre 3, sont :

$$f(x) \underset{a}{=}$$

$$f(x) \underset{a}{=}$$

$$f(x) \underset{a}{=}$$

$$f(x) \underset{a}{=}$$



Les polynômes de Taylor de f en a sont :

À l'ordre 0

À l'ordre 1

À l'ordre 2

Désormais, pour simplifier, nous nous plaçons au voisinage de $a = 0$. Les polynômes de Taylor de f en 0 sont :

$P_0(x) =$ $\qquad$ $P_1(x) =$ $\qquad$ $P_2(x) =$

Exercice 2 : Calculer la limite quand x tend vers 0 de $\dfrac{e^{x^2}\cos(2x)-1}{\sin(x^2)-x^2}$.

Exercice 3 : $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{\ln(1+x)} - \frac{b}{e^x-1}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
2. Montrer qu'alors, il existe α réel, que l'on déterminera, pour lequel

$$f(x) \underset{0}{=} \alpha x^2 + o(x^2)$$

Exercice 4 : Montrer que $e^{\mathrm{i}t} \underset{0}{=} 1 + \mathrm{i}t + t\varepsilon(t)$ où $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$, de deux façons :

— par formule trigonométrique,

— grâce à la série exponentielle.

3 Exemples de développements asymptotiques

Exercice 5 : $w_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

1. Donner la limite de w_n.
2. Donner le développement asymptotique à 2 termes de w_n.

Exercice 6 : Donner le développement asymptotique à 2 termes de

$$\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1} - 2n$$

Voici la liste des développements limités **au voisinage de 0** à connaître par cœur.

$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$
$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$
$(\alpha \in \mathbb{R}),\ (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\dfrac{x^2}{2!} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$
$\text{sh}(x) = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\text{ch}(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + ... + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$\arctan(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$