

Programme des colles MP
Semaine 18 : 3 au 8 mars 2025

1 Cours

Equations différentielles : Tout le chapitre.

Endomorphismes d'un espace euclidien : matrices orthogonales, adjoint d'un endomorphisme. Endomorphismes autoadjoints et théorème spectral. Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs. Matrices symétriques positives, définies positives.

PAS D'ISOMÉTRIES VECTORIELLES. PAS DE PROJECTEURS ET SYMÉTRIES.

2 Méthodes, exercices

- Tout exercice sur les équations différentielles, tout particulièrement les deux thèmes qui n'étaient pas au programme précédent, à savoir : la recherche de solutions développables en séries entières et le problème du raccord de solutions sur deux intervalles, en présence d'équations non normalisées.
- Tout exercice sur les matrices orthogonales. Tout exercice sur les endomorphismes autoadjoints et les matrices symétriques réelles.

3 Questions de cours

1. $O_n(\mathbf{R})$ est un sous-groupe de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $SO_n(\mathbf{R})$ est un sous-groupe de $O_n(\mathbf{R})$.
2. Démonstration par analyse-synthèse du théorème de représentation des formes linéaires dans un espace euclidien.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et B une base orthonormée de E . On a $\text{mat}_B(u^*) = (\text{mat}_B(u))^T$.
4. Si F est stable par u , alors F^\perp est stable par u^* .
5. Les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont deux à deux orthogonaux.
6. Pour u endomorphisme autoadjoint,

$$u \in \mathcal{S}^+(E) \Leftrightarrow \text{Sp}(u) \subset \mathbf{R}^+ \text{ et } u \in \mathcal{S}^{++}(E) \Leftrightarrow \text{Sp}(u) \subset \mathbf{R}^{+*}$$

Exemples d'exercices (en plus, pas spécifiquement au programme des khôlles, pour indication)

Équations différentielles : B.E.O. numéros 31, 32, 42, 74, 75.

Matrices symétriques : B.E.O. 66, 68, 92.

Adjoints : B.E.O. 63.
