Programme des colles MP
Semaine 14 : 20 au 25 janvier 2025

1 Cours

Séries entières : tout le chapitre. Le schéma page 3 dans $\mathbb{C}$ est la base de tout : il doit être bien compris et systématiquement utilisé.

2 Questions de cours

1. Les séries entières $\sum n^\alpha z^n$, où $\alpha \in \mathbb{R}$, sont de rayon de convergence égal à 1.
2. Une série entière de rayon de convergence R est normalement convergence sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon strictement inférieur à R. Corollaire : la somme d'une série entière est continue sur son disque ouvert de convergence.
3. Savoir démontrer (par intégration) les développements en série entière suivants :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

ou, ce qui revient au même mais est plus facile à apprendre :

$$\forall x \in]-1,1[,\ -\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} x^k$$

$$\forall x \in]-1,1[,\ \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

4. Développements en série entière :
   — B.E.O. n° 47
   — *Uniquement Hadrien, Mouhamadou, les deux Ryan, Fodié, Yanis.* B.E.O. n° 51

Exemples d'exercices (en plus, pas spécifiquement au programme des khôlles, pour indication)

B.E.O. numéros 20 (rayons de convergence), 21 (rayon de convergence), 22 (développement en série entière), 23(régularité dans un cas particulier), 24 (développement en série entière), 32 (équation différentielle).

Énoncé exercice 47 Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$.
2. $\sum a_n x^n$ avec $\begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$

Corrigé exercice 47

1. On note R le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$ et pour tout réel x, on pose $u_n(x) = \frac{3^n x^{2n}}{n}$.

   Pour x non nul, $\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \left|\frac{3nx^2}{n+1}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |3x^2|$.
   Donc, d'après la règle de d'Alembert :
   si $|3x^2| < 1$ c'est-à-dire si $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ alors $\sum_{n\geqslant 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$ converge absolument
   et si $|3x^2| > 1$ c'est-à-dire si $|x| > \frac{1}{\sqrt{3}}$ alors $\sum_{n\geqslant 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$ diverge.
   On en déduit que $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
   On pose : $\forall\, x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n x^{2n}}{n}$.
   On a : $\forall\, x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3x^2)^n}{n}$.
   Or, d'après les développements en séries entières usuels, on a : $\forall\, t \in]-1, 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} = -\ln(1-t)$.
   Ainsi : $\forall\, x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$, $S(x) = -\ln(1-3x^2)$.

2. Notons R le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.
   On considère les séries $\sum a_{2n} x^{2n} = \sum 4^n x^{2n}$ et $\sum a_{2n+1} x^{2n+1} = \sum 5^{n+1} x^{2n+1}$.

   Notons R_1 le rayon de convergence de $\sum 4^n x^{2n}$ et R_2 le rayon de convergence de $\sum 5^{n+1} x^{2n+1}$.
   Le rayon de convergence de $\sum x^n$ vaut 1.
   Or, $\sum 4^n x^{2n} = \sum (4x^2)^n$.
   Donc pour $|4x^2| < 1$ c'est-à-dire $|x| < \frac{1}{2}$, $\sum 4^n x^{2n}$ converge absolument
   et pour $|4x^2| > 1$ c'est-à-dire $|x| > \frac{1}{2}$, $\sum 4^n x^{2n}$ diverge.
   On en déduit que $R_1 = \frac{1}{2}$.
   Par un raisonnement similaire et comme $\sum 5^{n+1} x^{2n+1} = 5x \sum (5x^2)^n$, on trouve $R_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$.
   $\sum a_n x^n$ étant la série somme des séries $\sum a_{2n} x^{2n}$ et $\sum a_{2n+1} x^{2n+1}$, on en déduit, comme $R_1 \neq R_2$,
   que $R = \min(R_1, R_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}$.
   D'après ce qui précéde, on en déduit également que :
   $\forall\, x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (4x^2)^n + 5x \sum_{n=0}^{+\infty} (5x^2)^n = \frac{1}{1-4x^2} + \frac{5x}{1-5x^2}$.

Énoncé exercice 51

1. Montrer que la série $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ converge.

   On se propose de calculer la somme de cette série.

2. Donner le développement en série entière en 0 de $t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.
   Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.

3. En déduire le développement en série entière en 0 de $x \longmapsto \operatorname{Arcsin} x$ ainsi que son rayon de convergence.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.

Corrigé exercice 51

1. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.
   On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
   $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)(2n+1)}{(n+1)^2 2^4(2n+3)} = \dfrac{(2n+1)^2}{8(n+1)(2n+3)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4}$.
   Ainsi, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{4} < 1$.
   Donc, d'après la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.
2. D'après le cours, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $u \mapsto (1+u)^\alpha$ est développable en série entière en 0 et le rayon de convergence R de son développement en série entière vaut 1 si $\alpha \notin \mathbb{N}$.
   De plus, $\forall\, u \in]-1,1[$, $(1+u)^\alpha = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} u^n$.
   En particulier, pour $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ et $u = -t$:
   $R = 1$ et $\forall t \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-t}} = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)(-3)\cdots(-(2n-1))}{2^n n!}(-t)^n$.
   En multipliant numérateur et dénominateur par $2.4.\ldots 2n = 2^n n!$, on obtient :
   $\forall t \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-t}} = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} t^n$
   Conclusion : $R = 1$ et $\forall t \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-t}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} t^n$.
3. D'après la question précédente, en remarquant que : $x \in]-1,1[\Leftrightarrow t = x^2 \in [0,1[$ et $[0,1[\subset]-1,1[$, il vient :
   $\forall x \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^{2n}$ avec un rayon de convergence $R = 1$.
   Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ avec $\operatorname{Arcsin}' : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
   D'après le cours sur les séries entières, on peut intégrer terme à terme le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et le rayon de convergence est conservé.
   De plus, on obtient :
   $\forall x \in]-1,1[$, $\operatorname{Arcsin} x = \underbrace{\operatorname{Arcsin} 0}_{=0} + \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2(2n+1)} x^{2n+1}$ avec un rayon de convergence $R = 1$.
4. Prenons $x = \dfrac{1}{2} \in]-1,1[$ dans le développement précédent.
   On en déduit que $\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} \frac{1}{2^{2n+1}}$.
   C'est-à-dire, en remarquant que $\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6}$, on obtient $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)} = \frac{\pi}{3}$.