Programme des colles MP
Semaine 1 : 16 au 21 septembre 2024

1 Cours

Compléments d'algèbre linéaire : Sommes et sommes directes de p sous-espaces vectoriels de E. Sous-espace stable par un endomorphisme. Matrices dans des bases *adaptées*.
Déterminants (révisions) : révisions de MPSI. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs. Déterminants de Vandermonde.
Réduction (1) : sections 1 à 6, c'est-à-dire : Éléments propres d'un endomorphisme en dimension quelconque, éléments propres en dimension finie, polynôme caractéristique, ordre de multiplicité d'une valeur propre, diagonalisabilité, trigonalisabilité.

2 Méthodes, exercices

— Savoir déterminer l'image et le noyau d'une application linéaire f quand on a une de ses représentations matricielles.
— Étant donnée une projection, savoir retrouver sur un schéma l'image ($\operatorname{Im} p = F_1$, le noyau $\ker p = F_2$, l'espace des invariants). Savoir rechercher l'image et le noyau d'un projecteur p, et donner sa matrice dans une base adaptée.
— Être bien à l'aise dans les calculs de déterminants, en particulier pour le calcul des polynômes caractéristiques.
— Savoir montrer qu'un sous-espace vectoriel est stable par une application linéaire.
— Savoir déterminer les éléments propres d'une matrice : racines de χ_M et résolution de $MX = \lambda X$ pour avoir $E_\lambda(M)$. Savoir diagonaliser M dans le cas où elle est diagonalisable.

3 Démonstrations / Questions de cours

1. Pour $F_1, \dots, F_p$ sous-espaces vectoriels de E, $F_1 + \cdots + F_p$ est un sous-espace vectoriel de E. C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient $F_1, \dots, F_p$.
2. Pour $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$, on appelle *déterminant de Vandermonde* le déterminant de la matrice d'ordre $n+1$ suivant :
$$V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$
On a $V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \prod\limits_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$.
3. B.E.O. n°64 (images, noyaux pour f et f^2, somme directe) (recopié ci-dessous).
4. Si u et w commutent, alors les sous-espaces propres de u sont stables par w.
5. Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u.
Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit, χ_{u_F}, divise χ_u. En corollaire :
    - Pour toute valeur propre λ, on a
$$1 \leqslant \dim E_\lambda \leqslant m(\lambda)$$
    - En particulier, si λ est racine simple de χ_u ou χ_A, alors $\dim E_\lambda = 1$.

Exemples d'exercices de la banque d'épreuves d'oral CCINP (en plus, pas spécifiquement au programme des khôlles, pour indication)
On rappelle que si vous passez les oraux de CCINP, vous devrez faire au début de l'oral un des 112 exercices de cette banque d'épreuves.
B.E.O. numéros 67, 69, 70, 71, 73, 83.

Énoncé exercice 64 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. Démontrer que : $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f \Longrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
2. (a) Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longleftrightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.
   (b) Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longrightarrow E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.

Corrigé exercice 64

1. Supposons $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.
   Indépendamment de l'hypothèse, on peut affirmer que $\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f$ (*)
   Montrons que $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im} f^2$.
   Soit $y \in \mathrm{Im} f$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
   Or $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$, donc $\exists\, (a, b) \in E \times \mathrm{Ker} f$ tel que $x = f(a) + b$.
   On a alors $y = f^2(a) \in \mathrm{Im} f^2$. Ainsi $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im} f^2$ (**)
   D'après (*) et (**), $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.

2. (a) On a $\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker} f^2$.
   On en déduit que $\mathrm{Im} f^2 = \mathrm{Im} f \Longleftrightarrow \mathrm{rg} f^2 = \mathrm{rg} f$ et $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2 \Longleftrightarrow \dim \mathrm{Ker} f = \dim \mathrm{Ker} f^2$.
   Alors, en utilisant le théorème du rang,
   $$\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Leftrightarrow \mathrm{rg} f = \mathrm{rg} f^2 \Leftrightarrow \dim \mathrm{Ker} f = \dim \mathrm{Ker} f^2 \Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$$
   (b) Supposons $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
   Soit $x \in \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f$. Il existe $a \in E$ tel que $x = f(a)$ et $f(x) = 0_E$.
   On en déduit que $f^2(a) = 0_E$ c'est-à-dire $a \in \mathrm{Ker} f^2$. Or, d'après l'hypothèse et 2.(a),
   $\mathrm{Ker} f^2 = \mathrm{Ker} f$ donc $a \in \mathrm{Ker} f$, c'est-à-dire $f(a) = 0_E$.
   C'est-à-dire $x = 0$.
   Ainsi $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \{0_E\}$. (***)
   De plus, d'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Ker} f = \dim E$. (****)

   Donc, d'après (***) et (****), $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.
